

# 方程式 $x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

不定方程式  $x^4 + y^4 = z^2$  から派生<sup>注1</sup>して、不定方程式

$$x^4 + kx^2y^2 + y^4 = z^2$$

の整数解を考える問題があるが、[1]では次の定理が証明されている。

定理 不定方程式

$$x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす正の整数  $x, y, z$  は存在しない。

ところが、[1]の証明には論理の飛躍がある<sup>注2</sup>ため、実際には証明されていないことになる。本稿では、その不備を補って定理の証明を完成させると同時に、剰余合同類に注目して、証明をより易しくすることも考える。

定理の証明

$$x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす正の整数  $x, y, z$  が存在すると仮定すれば、その中で

$z$  が最小

となるときがあるはずである。ここで、 $x$  と  $y$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば、 $p^4 | z^2$  となるから  $p^2 | z$  であり、

$$x = px_1, \quad y = py_1, \quad z = p^2z_1$$

を満たす正の整数  $x_1, y_1, z_1$  が存在する。(1)に代入して両辺を  $p^4$  で割ると

$$x_1^4 + 5x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立ち、 $z_1 < p^2z_1$  であるから、 $z$  の最小性に反する。よって、

$x$  と  $y$  は互いに素

である。特に、少なくとも一方は奇数でなければならないが、 $x$  と  $y$  がともに奇数であるとすれば、 $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{4}$  ゆえ  $x^4 + 5x^2y^2 + y^4 \equiv 3 \not\equiv z^2 \pmod{4}$  となって矛盾するから、 $x$  と  $y$  の一方は奇数で、他方は偶数となる。(1)が  $x$  と  $y$  について対称であることを考えて、

$x$  は偶数、 $y$  は奇数

として定理を証明すれば十分である。

(1)を変形して

$$4x^4 + 20x^2y^2 + 4y^4 = 4z^2$$

$$(2x^2 + 5y^2)^2 - 21y^4 = 4z^2$$

$$(2x^2 + 5y^2)^2 - 4z^2 = 21y^4$$

$$\therefore (2x^2 + 5y^2 + 2z)(2x^2 + 5y^2 - 2z) = 21y^4 \tag{2}$$

ここで,  $2x^2 + 5y^2 + 2z$  と  $2x^2 + 5y^2 - 2z$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば,  $p$  は

$$(2x^2 + 5y^2 + 2z) - (2x^2 + 5y^2 - 2z) = 4z$$

を割り,  $21y^4$  は奇数であるから,  $p|z$  である.  $p$  は素数であり, (2) より  $p^2|21y^4$  であるから

$$p^2|21y^4 \implies p|y^4 \implies p|y$$

となるが, (1) より  $p|x$  となって,  $x$  と  $y$  が互いに素であることに反する. よって,

$$\gcd(2x^2 + 5y^2 + 2z, 2x^2 + 5y^2 - 2z) = 1 \quad (3)$$

である.

(2), (3) より, 互いに素な正の整数  $a, b$  を用いて

$$1^\circ \quad 2x^2 + 5y^2 + 2z = 21a^4, \quad 2x^2 + 5y^2 - 2z = b^4, \quad y = ab$$

$$2^\circ \quad 2x^2 + 5y^2 + 2z = b^4, \quad 2x^2 + 5y^2 - 2z = 21a^4, \quad y = ab$$

$$3^\circ \quad 2x^2 + 5y^2 + 2z = 7a^4, \quad 2x^2 + 5y^2 - 2z = 3b^4, \quad y = ab$$

$$4^\circ \quad 2x^2 + 5y^2 + 2z = 3b^4, \quad 2x^2 + 5y^2 - 2z = 7a^4, \quad y = ab$$

のいずれかの形に表される.  $x$  は偶数,  $y$  が奇数であるから,

$$2x^2 \equiv 0 \pmod{8}, \quad y^2 \equiv a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であることに注意する.

1°, 2° のときは

$$2(2x^2 + 5y^2) = 21a^4 + b^4$$

であるが,

$$2(2x^2 + 5y^2) \equiv 10y^2 \equiv 10 \equiv 2 \pmod{8}$$

$$21a^4 + b^4 \equiv 21 + 1 \equiv 6 \pmod{8}$$

であるから, 実際には成り立たない.

3°, 4° のときは

$$2(2x^2 + 5y^2) = 7a^4 + 3b^4, \quad y = ab$$

$$4x^2 = 7a^4 - 10a^2b^2 + 3b^4 = (a^2 - b^2)(7a^2 - 3b^2)$$

$$\therefore \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \frac{7a^2 - 3b^2}{4} \quad (4)$$

ここで,  $a, b$  が奇数であることより

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 7a^2 - 3b^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

であるから,

$$\frac{a^2 - b^2}{4}, \quad \frac{7a^2 - 3b^2}{4} \text{ はともに整数}$$

である. また,

$$a^2 = \frac{7a^2 - 3b^2}{4} - 3 \cdot \frac{a^2 - b^2}{4}, \quad b^2 = \frac{7a^2 - 3b^2}{4} - 7 \cdot \frac{a^2 - b^2}{4}$$

は互いに素である (共通な素因数をもたない) から,

$$\gcd\left(\frac{a^2 - b^2}{4}, \frac{7a^2 - 3b^2}{4}\right) = 1 \quad (5)$$

であり, (4), (5)より

$$\frac{a^2 - b^2}{4} = \pm c^2, \quad \frac{7a^2 - 3b^2}{4} = \pm d^2 \quad (\text{複号同順})$$

を満たす(互いに素な)正の整数  $c, d$  が存在する。

$a, b$  は奇数であるから, 平方を 8 で割った余りは 1 であり, 16 で割った余りを考えると

$a^2$	1	1	9	9
$b^2$	1	9	1	9
$7a^2 - 3b^2$	4	12	12	4

の 4 つの場合が起こり得るが,  $7a^2 - 3b^2 = -4d^2$  であるとすれば,

$$a^2 \equiv 1, \quad b^2 \equiv 9 \pmod{16} \quad \text{または} \quad a^2 \equiv 9, \quad b^2 \equiv 1 \pmod{16}$$

となって, いずれの場合も

$$a^2 - b^2 \equiv 8 \pmod{16}, \quad a^2 - b^2 \neq -4d^2$$

である。したがって, 実際には

$$c^2 = \frac{a^2 - b^2}{4} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \tag{6}$$

$$d^2 = \frac{7a^2 - 3b^2}{4} \tag{7}$$

の場合に限られる。

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

は互いに素であるから,

$$\gcd\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) = 1 \tag{8}$$

であり, (6), (8)より

$$\frac{a+b}{2} = m^2, \quad \frac{a-b}{2} = n^2, \quad c = mn$$

を満たす正の整数  $m, n$  が存在する。これを整理すると

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2$$

と表されるから, (7)より

$$4d^2 = 7(m^2 + n^2)^2 - 3(m^2 - n^2)^2 = 4m^4 + 20m^2n^2 + 4n^4$$

$$\therefore m^4 + 5m^2n^2 + n^4 = d^2$$

したがって,  $(x, y, z) = (m, n, d)$  は (1) の正の整数解であるが, (7), (4), (1)より

$$d^2 \leq \left(\frac{x}{2}\right)^2 < x^2 \leq x^4 < z^2$$

であるから,  $z$  の最小性に反する。

(証明おわり)

注1 フェルマー方程式  $x^n + y^n = z^n$  の問題(1994年 A. ワイルズにより解決)や不定方程式  $x^{2n} \pm y^{2n} = z^2$  の問題は, ピタゴラス方程式  $x^2 + y^2 = z^2$  にその起源を見出すことができる。ピタゴラス方程式の(非自明な)整数解が無数にあるのに対して, いずれも(非自明な)整数解が存在しない(と予想された)という対比も興味深い。2つの方向の発展の分岐点には, フェルマー自身が4次の場合の証明で考察した方程式  $x^4 + y^4 = z^2$  があるが, この問題の派生として不定方程式  $x^4 + kx^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解問題が生まれたと考えられる。

注2 論文[1]の証明において, 方程式

$$x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

を満たす正の整数が存在するとすれば, 正の整数  $a, b$  を用いて

$$2x^2 + 5y^2 + 2z = 21a^4, \quad 2x^2 + 5y^2 - 2z = b^4$$

または

$$2x^2 + 5y^2 + 2z = b^4, \quad 2x^2 + 5y^2 - 2z = 21a^4$$

と表される場合に限られるとして(非自明な)整数解がないことを証明しているが,

$$2x^2 + 5y^2 + 2z = 7a^4, \quad 2x^2 + 5y^2 - 2z = 3b^4$$

および

$$2x^2 + 5y^2 + 2z = 3b^4, \quad 2x^2 + 5y^2 - 2z = 7a^4$$

と表される場合が抜けているので, 証明は終わっていない。すべての場合で矛盾を示す方針だけに, 場合分けの漏れは致命的である。

## 参考文献

- [1] T.Venkatesh, On Integer Solutions of  $x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2$ , Indian J. pure appl. Math., 26(9), 837-839 (1995)
- [2] 大塚美紀生, ディオファントス方程式  $x^3 + y^3 = 2z^3$  について, 早稲田数学フォーラム (2009), <http://wasmath.la.coocan.jp/x3+y3=2z3.pdf>