

方程式 $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解とその応用

大塚美紀生

[3]および[4]において，方程式

$$x^4 + 4x^2y^2 + y^4 = z^2, \quad x^4 + 5x^2y^2 + y^4 = z^2$$

について考えてきたが，本稿ではまず次の定理を証明する。

定理 1 不定方程式

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たす正の整数 x, y, z は存在しない。

外見的には先の 2 編と似てはいるが， x^2y^2 の係数が変わるだけで整数論的構造が大きく変わるので，証明の手法や整数解の構造が異なってくる。それゆえ，個々の場合に整数解の構造を調べることには意味がある。

それだけではなく， x^2y^2 の係数が 6 の場合は，他の問題と結びつくことも興味深い。本稿では，ピタゴラス数^{注1}に関する性質(定理 2)と 4 次の Sierpiński の問題^{注2}(定理 3)への応用を考える。

定理 2 正の整数 a, b, c が

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たすとき，

$$b^2 + c^2 = d^2$$

を満たす正の整数 d は存在しない。^{注3}

定理 3 正の整数 x, y, z が方程式

$$x^4 + y^4 = 2z^4$$

を満たすならば， $x = y = z$ である。^{注4}

定理 1 の証明

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす正の整数 x, y, z が存在すると仮定すれば，その中で

z が最小

となるときがあるはずである。ここで， x と y が共通の素因数 p をもつとすれば， $p^4 | z^2$ となるから $p^2 | z$ であり，

$$x = px_1, \quad y = py_1, \quad z = p^2z_1$$

を満たす正の整数 x_1, y_1, z_1 が存在する。(1)に代入して両辺を p^4 で割ると

$$x_1^4 + 6x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

が成り立ち， $z_1 < p^2z_1$ であるから， z の最小性に反する。よって，

x と y は互いに素

である。特に、少なくとも一方は奇数であるが、 x と y がともに奇数であるとすれば、

$$x^4 \equiv y^4 \equiv 1 \pmod{16}$$

$$x^2y^2 \equiv 1 \text{ または } 9 \pmod{16} \text{ 注}^5$$

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 \equiv 1 + 6 + 1 \equiv 8 \pmod{16}$$

$$z^2 \equiv 0 \text{ または } 4 \pmod{16} \text{ 注}^6$$

より $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 \neq z^2$ となって矛盾する。よって、 x と y の一方は奇数で、他方は偶数となる。(1)が x と y について対称であることを考えて、

x は偶数、 y は奇数

として定理を証明すれば十分である。

(1)を変形して^{注7}

$$(x^2 + 3y^2)^2 - 8y^4 = z^2$$

$$(x^2 + 3y^2 + z)(x^2 + 3y^2 - z) = 8y^4$$

$x^2 + 3y^2 + z$ および $x^2 + 3y^2 - z$ が偶数であることを考えて、

$$\frac{x^2 + 3y^2 + z}{2} \cdot \frac{x^2 + 3y^2 - z}{2} = 2y^4 \quad (2)$$

ここで、 $\frac{x^2 + 3y^2 + z}{2}$ と $\frac{x^2 + 3y^2 - z}{2}$ が共通の素因数 p をもつとすれば、 p は

$$\frac{x^2 + 3y^2 + z}{2} - \frac{x^2 + 3y^2 - z}{2} = z$$

を割り、 p は素数であるから、(2)において

$$p^2 | 2y^4 \implies p | y^4 \implies p | y$$

となるが、(1)より $p | x$ となって、 x と y が互いに素であることに反する。よって、

$$\frac{x^2 + 3y^2 + z}{2} \text{ と } \frac{x^2 + 3y^2 - z}{2} \text{ は互いに素} \quad (3)$$

である。

(2)、(3)より、互いに素な正の整数 a 、 b を用いて

$$\frac{x^2 + 3y^2 + z}{2} = 2a^4, \quad \frac{x^2 + 3y^2 - z}{2} = b^4, \quad y = ab$$

または

$$\frac{x^2 + 3y^2 + z}{2} = b^4, \quad \frac{x^2 + 3y^2 - z}{2} = 2a^4, \quad y = ab$$

と表される。いずれの場合も

$$x^2 + 3y^2 = 2a^4 + b^4, \quad y = ab$$

$$x^2 = 2a^4 - 3a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)(2a^2 - b^2)$$

$$\therefore \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{4}(2a^2 - b^2) \quad (4)$$

ここで、 $y = ab$ より a 、 b は奇数であり、

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{8}, \quad 2a^2 - b^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

であるから ,

$$\frac{a^2 - b^2}{4} \text{ は偶数 , } 2a^2 - b^2 \text{ は奇数 (ともに整数)} \quad (5)$$

である。また ,

$$a^2 = (2a^2 - b^2) - 4 \cdot \frac{a^2 - b^2}{4}, \quad b^2 = (2a^2 - b^2) - 8 \cdot \frac{a^2 - b^2}{4}$$

は互いに素である (共通な素因数をもたない) から ,

$$\frac{a^2 - b^2}{4} \text{ と } 2a^2 - b^2 \text{ は互いに素} \quad (6)$$

である。(4), (5), (6) より

$$\frac{a^2 - b^2}{4} = \pm c^2, \quad 2a^2 - b^2 = \pm d^2 \quad (\text{複号同順})$$

を満たす (互いに素な) 正の整数 c, d が存在する。

$2a^2 - b^2 = -d^2$ であるとすれば , a, b, d が奇数であることより

$$2a^2 - b^2 + d^2 \equiv 2 - 1 + 1 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{8}$$

となって矛盾するから , 実際には

$$c^2 = \frac{a^2 - b^2}{4} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \quad (7)$$

$$d^2 = 2a^2 - b^2 \quad (8)$$

の場合に限られる。

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

は互いに素であるから ,

$$\frac{a+b}{2} \text{ と } \frac{a-b}{2} \text{ は互いに素} \quad (9)$$

であり , (7), (9) より

$$\frac{a+b}{2} = m^2, \quad \frac{a-b}{2} = n^2, \quad c = mn$$

を満たす正の整数 m, n が存在する。これを整理すると

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2$$

と表されるから , (8) より

$$d^2 = 2(m^2 + n^2)^2 - (m^2 - n^2)^2 = m^4 + 6m^2n^2 + n^4$$

したがって , $(x, y, z) = (m, n, d)$ は (1) の正の整数解であるが , (8), (4), (1) より

$$d^2 \leq \left(\frac{x}{2}\right)^2 < x^2 \leq x^4 < z^2$$

であるから , z の最小性に反する。

ゆえに ,

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たす正の整数 x, y, z は存在しない。

(証明おわり)

定理 2 の証明

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{10}$$

を満たす正の整数 a, b, c に対して,

$$b^2 + c^2 = d^2 \tag{11}$$

を満たす正の整数 d があると仮定する。

$\delta = \gcd(b, c)$ とすると, (10) より $\delta^2 \mid a^2$, (11) より $\delta^2 \mid d^2$ であるから

$$\delta \mid a, \delta \mid d$$

となるので, はじめから

$$\gcd(b, c) = 1$$

のときに定理 2 を証明すれば十分である。このとき, ピタゴラス数の性質^{注8}より, 偶奇の異なる互いに素な正の整数 m, n を用いて

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2 \tag{12}$$

または

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2 \tag{13}$$

と表される。

(12) のとき, (11) は

$$(m^2 - n^2)^2 + (m^2 + n^2)^2 = d^2$$

となる。 m と n の偶奇は異なるから, $m^2 - n^2$ と $m^2 + n^2$ はともに奇数であり,

$$(m^2 - n^2)^2 \equiv (m^2 + n^2)^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

となるが, $d^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ より

$$(m^2 - n^2)^2 + (m^2 + n^2)^2 \neq d^2$$

となって矛盾する。

(13) のとき, (11) は

$$(2mn)^2 + (m^2 + n^2)^2 = d^2$$

すなわち,

$$m^4 + 6m^2n^2 + n^4 = d^2$$

となるが, これは定理 1 と矛盾する。

以上より, (10) を満たす正の整数 a, b, c に対して, (11) を満たす正の整数 d は存在しない。
(証明おわり)

定理 3 の証明

正の整数 x, y, z が

$$x^4 + y^4 = 2z^4 \quad (14)$$

を満たすものとする。対称性より

$$x \geq y$$

であるとしてよい。(14)より x と y の偶奇は等しいから、正の整数 a 、非負整数 b を用いて

$$x = a + b, \quad y = a - b \quad (15)$$

と表される。

$$x^4 + y^4 = (a + b)^4 + (a - b)^4 = 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)$$

であるから、(14)は

$$a^4 + 6a^2b^2 + b^4 = (z^2)^2$$

と書き換えられる。 $b > 0$ ならば定理 1 に反するから

$$b = 0$$

であり、(15)より

$$x = y = a,$$

(14)より

$$x = y = z > 0$$

である。

(証明おわり)

注 1 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす自然数の組 (a, b, c) をピタゴラス数(Pythagorean triple) という。日本語では「数」と訳されるが、個別の数を指すのではなく、3つの数の組を指す言葉である。3辺の長さがすべて整数となる直角三角形(3辺の長さがピタゴラス数である三角形)は、ピタゴラス三角形と呼ばれる。

注 2 シェルピンスキー (Sierpiński) の問題と呼ばれるものは数多くあるが、ここでいうのは「3以上の整数 p に対して、 x^p, y^p, z^p が等差数列になるような整数 x, y, z は $x = y = z$ に限られる」のではないかという問題である。

$$x^p - z^p = z^p - y^p \iff x^p + y^p = 2z^p$$

であるから、「方程式 $x^p + y^p = 2z^p$ は非自明解をもたない」と予想されているのと同じである。 $p = 2$ のときは、無数に非自明解をもつ。

注 3 a と b について対称であるから、定理 2 は

$$a^2 + c^2 = d^2$$

を満たす正の整数 d が存在しないことをも意味する。

注 4 定理 3 は既に [2] でも証明されているが、本稿の定理 1 を用いる方法は別証明となる。

注5 奇数の平方は，8で割ると1余るから，16で割った余りは1または9である。

注6 x, y がともに奇数のもとでは，(1)により， z は偶数である。

注7 (1)は，ピタゴラス方程式の形

$$(x^2 + y^2)^2 + (2xy)^2 = z^2$$

にもできることに期待が集まりそうであるが，

$$(x^2 + y^2)^2 = (z + 2xy)(z - 2xy)$$

と変形しても，

$$(2xy)^2 = (z + x^2 + y^2)(z - x^2 - y^2)$$

と変形しても，有効な議論に持ち込めない。逆に，定理1の結果をここへ適用することにより，定理2が得られるのである。

注8 互いに素な正の整数 a, b, c が

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{10}$$

を満たすとき，

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2 \tag{12}$$

または

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2 \tag{13}$$

を満たす偶奇が異なる互いに素な正の整数 m, n が存在する。

これはピタゴラス数の有名な性質であるが，知らない人もいるかもしれないので，一応証明を与えておくことにする。

a と b は互いに素であるから，少なくとも一方は奇数であるが，対称性より

b は奇数

であると仮定して，(12)を導けば十分である。

ここで， a, b がともに奇数であるとすれば，

$$a = 2\alpha + 1, \quad b = 2\beta + 1 \quad (\alpha, \beta \text{ は整数})$$

と表されて

$$a^2 + b^2 = 4(\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta) + 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

となるから，平方数 c^2 と等しくならない。よって，

a は偶数， b と c は奇数

である。

(10)を変形すると

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

$$\therefore \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c+b}{2} \cdot \frac{c-b}{2} \tag{16}$$

b, c は奇数であるから

$$\frac{c+b}{2}, \frac{c-b}{2} \text{ はともに整数}$$

であり， $b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{8}$ より

$$a^2 = c^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

であるから， $\frac{a}{2}$ は偶数である。

$$b = \frac{c+b}{2} - \frac{c-b}{2}, \quad c = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{2}$$

は互いに素である(共通の素因数をもたない)から，

$$\frac{c+b}{2} \text{ と } \frac{c-b}{2} \text{ は互いに素}$$

であり，(16)より

$$\frac{a}{2} = mn, \quad \frac{c+b}{2} = m^2, \quad \frac{c-b}{2} = n^2$$

となる互いに素な正の整数 m, n が存在する。

$$\frac{a}{2} = mn \text{ は偶数}$$

であるから， m と n の一方は偶数で，他方は奇数である。

(おわり)

参考文献

- [1] 足立恒雄，フェルマーの大定理，筑摩書房 (2006)
- [2] 大塚美紀生，ディオファントス方程式 $2^n x^2 + y^4 = z^4$ の整数解，
早稲田数学フォーラム (2008)
<http://wasmath.la.coocan.jp/fermat-sierpinski.pdf>
- [3] 大塚美紀生，ディオファントス方程式 $x^4 + 5x^2 y^2 + y^4 = z^2$ の整数解，
早稲田数学フォーラム (2014)
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+5x2y2+y4=z2.pdf>
- [4] 大塚美紀生，ディオファントス方程式 $x^4 + 4x^2 y^2 + y^4 = z^2$ の整数解，
早稲田数学フォーラム (2014)
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+4x2y2+y4=z2.pdf>

2014.1.16

増補 2014.3.17

増補 2017.2.10