

方程式 $x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

定理 1 自然数 x, y, z が

$$x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たすならば,

$$x = y \quad (z = 3x^2 = 3y^2)$$

である。

本稿ではこの定理を初等的に証明する。

[2]の中で述べたように, $x^4 + kx^2y^2 + y^4 = z^2$ の形の方程式は, 整数 k の値ごとに整数解の構造が異なるが故に, 証明の手法を新たに編み出す必要がある。それはそれで魅力であるが, k が大きくなるにつれて構造が複雑になるので, いずれは代数幾何学における大掛かりな理論を必要としていくであろう。

定理 1 の応用として, さらに 2 つの定理を証明する。意外な不定方程式と結びつくことも興味深い。

定理 2 自然数 a, b, c, d が

$$3a^2 - b^2 = 2c^2, \quad 5a^2 - 3b^2 = 2d^2$$

を同時に満たすならば,

$$a = b = c = d$$

である。

定理 3 自然数 x, y, z が

$$9x^4 - 2x^2y^2 + 9y^4 = z^2$$

を満たすならば,

$$x = y \quad (z = 4x^2 = 4y^2)$$

である。

定理 1 の証明

$$x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) で $x \neq y$ であるものがあれば, そのうち

z が最小

となる場合をとっておくことにする。

$d = \gcd(x, y)$ とすると, (1) より $d^4 \mid z^2$ であるから

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = d^2 z_1$$

となる自然数 x_1, y_1, z_1 が存在し,

$$x_1^4 + 7x_1^2 y_1^2 + y_1^4 = z_1^2, \quad z \geq z_1$$

となるから, z の最小性より

x と y が互いに素

である。このとき x, y の少なくとも一方は奇数であるが, 対称性より

x は奇数

であるとしてよい。

(1) を変形すると

$$(x^2 - y^2)^2 + 9x^2 y^2 = z^2$$

$$9x^2 y^2 = z^2 - (x^2 - y^2)^2 = (z + x^2 - y^2)(z - x^2 + y^2) \quad (2)$$

$x^2 \geq y^2$ のときは $z + x^2 - y^2 > 0$, $x^2 \leq y^2$ のときは $z - x^2 + y^2 > 0$ であるから,

$$z + x^2 - y^2, \quad z - x^2 + y^2 \text{ はともに正}$$

である。

I $3 \nmid xy$ のとき

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$z^2 = x^4 + 7x^2 y^2 + y^4 \equiv 1 + 7 + 1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ より } 3 \mid z$$

$$z + x^2 - y^2 \equiv z - x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

(2) において $x^2 y^2 = \frac{z + x^2 - y^2}{3} \cdot \frac{z - x^2 + y^2}{3}$ は 3 で割れないことに注意して

$$\frac{z + x^2 - y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素な自然数}) \quad (3)$$

とおくと,

$$3 \parallel m^{\text{注1}}, \quad 3 \nmid n$$

である。(3) を

$$z = \frac{m-n}{n} x^2 + y^2$$

と変形して (1) に代入すると

$$x^4 + 7x^2 y^2 = \frac{(m-n)^2}{n^2} x^4 + 2 \cdot \frac{m-n}{n} x^2 y^2$$

$$\frac{9n-2m}{n} x^2 y^2 = \frac{m^2-2mn}{n^2} x^4$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{m(m-2n)}{n(9n-2m)} \quad (4)$$

$\gcd(m, n) = 1, \quad 3 \parallel m$ より

$$\gcd(m, 9n - 2m) = \gcd(m, 9n) = \gcd(m, 9) = 3$$

$$\gcd(m - 2n, n) = \gcd(m, n) = 1$$

$$9n - 2m = -2(m - 2n) + 5n \text{ より}$$

$$\gcd(m - 2n, 9n - 2m) = \gcd(m - 2n, 5n)$$

$$= \gcd(m - 2n, 5)$$

$$= 1 \text{ または } 5$$

であるから, (4)より

$$x^2 = \pm n \cdot \frac{9n - 2m}{3}, \quad y^2 = \pm \frac{m}{3}(m - 2n) \quad (\text{複号同順}) \quad (5)$$

または

$$x^2 = \pm n \cdot \frac{9n - 2m}{15}, \quad y^2 = \pm \frac{m}{3} \cdot \frac{m - 2n}{5} \quad (\text{複号同順}) \quad (6)$$

となる。

IA $3 \nmid xy$, y が奇数のとき

$x^2, z + x^2 - y^2$ は奇数であり, (3)より m, n はともに奇数であるから

$$\gcd(n, 9n - 2m) = \gcd(n, 2m) = \gcd(n, m) = 1$$

$$\gcd(m, m - 2n) = \gcd(m, 2n) = \gcd(m, n) = 1$$

であることを考え, (5), (6)より

$$n = a^2, \quad 9n - 2m = \pm 3b^2, \quad m = 3c^2, \quad m - 2n = \pm d^2 \quad (\text{複号同順})$$

または

$$n = a^2, \quad 9n - 2m = \pm 15b^2, \quad m = 3c^2, \quad m - 2n = \pm 5d^2 \quad (\text{複号同順})$$

を満たす(どの2つも互いに素な)正の奇数 a, b, c, d が存在する。

$a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから

$$9n - 2m = 9a^2 - 6c^2 \equiv 3 \pmod{8}$$

$$m - 2n = 3c^2 - 2a^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

となつて(6)は不成立であり, (5)の複号は

$$n = a^2, \quad 9n - 2m = 3b^2, \quad m = 3c^2, \quad m - 2n = d^2 \quad (7)$$

に定まる。連立方程式として m, n を消去すると

$$3a^2 - 2c^2 = b^2, \quad 3c^2 - 2a^2 = d^2$$

となるから, [3] 定理2より^{注2}

$$a = b = c = d$$

が成り立つ。(7), (5)より

$$x = ab, \quad y = cd$$

であるから

$$x = y$$

が得られる。

IB $3 \nmid xy$, y が偶数のとき

x^2 は奇数, $z + x^2 - y^2$ は偶数であり, (3) より m は偶数, n は奇数であるから

$$\gcd(n, 9n - 2m) = \gcd(n, 2m) = \gcd(n, m) = 1$$

$$\gcd(m, m - 2n) = \gcd(m, 2n) = \gcd(m, 2) = 2$$

であることを考え, (5), (6) より

$$n = a^2, \quad 9n - 2m = \pm 3b^2, \quad m = 6c^2, \quad m - 2n = \pm 2d^2 \quad (\text{複号同順}) \quad (8)$$

または

$$n = a^2, \quad 9n - 2m = \pm 15b^2, \quad m = 6c^2, \quad m - 2n = \pm 10d^2 \quad (\text{複号同順}) \quad (9)$$

を満たす(どの2つも互いに素な)自然数 a, b, c, d が存在する。 a は奇数であり,

$$c \text{ が奇数のとき } m - 2n = 6c^2 - 2a^2 \equiv 4 \not\equiv \pm 2d^2 \pmod{8}$$

$$c \text{ が偶数のとき } 9n - 2m = 9a^2 - 12c^2 \equiv 9 \equiv 1 \not\equiv \pm 3b^2 \pmod{8}$$

であるから, (8) は不成立である。

a, b が奇数であることに注意して, c が奇数のとき

$$9n - 2m = 9a^2 - 12c^2 \equiv 9 - 12 \equiv 5 \pmod{8}$$

$$15b^2 \equiv 15 \equiv 7 \pmod{8}$$

であるから $9n - 2m \neq \pm 15b^2$ となって, (9) も不成立である。

c が偶数のとき

$$9n - 2m = 9a^2 - 12c^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 15b^2 \equiv -1 \pmod{8}$$

より, (9) は

$$9n - 2m = 9a^2 - 12c^2 = -15b^2$$

かつ

$$m - 2n = 6c^2 - 2a^2 = -10d^2$$

に限られるが,

$$3a^2 - 4c^2 = -5b^2 \quad \text{かつ} \quad 3c^2 - a^2 = -5d^2$$

より a を消去すると

$$5c^2 = -5(b^2 + 3d^2)$$

$$c^2 = -b^2 - 3d^2$$

となって, 両辺で正負が異なり矛盾する。

II $3 \mid xy$ のとき

(1)の変形の仕方を変えて^{注3}

$$x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$$

$$\left(y^2 + \frac{7}{2}x^2\right)^2 - \frac{45}{4}x^4 = z^2$$

$$(7x^2 + 2y^2)^2 - 45x^4 = 4z^2$$

$$(7x^2 + 2y^2 + 2z)(7x^2 + 2y^2 - 2z) = 45x^4 \quad (10)$$

x と y は互いに素であるから, 「 $3|x$ かつ $3 \nmid y$ 」または「 $3 \nmid x$ かつ $3|y$ 」であり,
 $3 \nmid 7x^2 + 2y^2$

x は奇数であるから, $7x^2 + 2y^2 + 2z$ と $7x^2 + 2y^2 - 2z$ が共通の素因数 p をもてば,

$$\implies p | 2(7x^2 + 2y^2) \text{ かつ } p^2 | 45x^4 \quad (p \neq 2)$$

$$\implies p | 7x^2 + 2y^2 \text{ かつ } p^2 | 45x^4 \quad (p \neq 3)$$

$$\implies p | 7x^2 + 2y^2 \text{ かつ } p^2 | 5x^4$$

$$\implies p | 7x^2 + 2y^2 \text{ かつ } p|x$$

$$\implies p|x \text{ かつ } p|2y^2$$

$$\implies p|x \text{ かつ } p|y$$

となって x と y が互いに素であることに反するから,

$7x^2 + 2y^2 + 2z$ と $7x^2 + 2y^2 - 2z$ は互いに素である。

(10)より

$$(x, 7x^2 + 2y^2 + 2z, 7x^2 + 2y^2 - 2z)$$

$$= (ab, 45a^4, b^4), (ab, b^4, 45a^4), (cd, 9c^4, 5d^4), (cd, 5d^4, 9c^4)^{\text{註4}}$$

を満たす互いに素な正の奇数 a, b , または互いに素な正の奇数 c, d が存在して

$$x = ab, \quad 2(7x^2 + 2y^2) = 45a^4 + b^4$$

または

$$x = cd, \quad 2(7x^2 + 2y^2) = 9c^4 + 5d^4$$

が成り立つ。

$$y \text{ が奇数のとき } 2(7x^2 + 2y^2) \equiv 2 \times (7 + 2) \equiv 2 \pmod{8}$$

$$y \text{ が偶数のとき } 2(7x^2 + 2y^2) \equiv 14x^2 \equiv 14 \equiv 6 \pmod{8}$$

であり,

$$45a^4 + b^4 \equiv 45 + 1 \equiv 6 \pmod{8}$$

$$9c^4 + 5d^4 \equiv 9 + 5 \equiv 6 \pmod{8}$$

であるから, いずれの場合も

y は偶数

であり,

$$4y^2 = 45a^4 - 14a^2b^2 + b^4 = (9a^2 - b^2)(5a^2 - b^2)$$

または

$$4y^2 = 9c^4 - 14c^2d^2 + 5d^4 = (9c^2 - 5d^2)(c^2 - d^2)$$

が成り立つ。

IIA $4y^2 = (9a^2 - b^2)(5a^2 - b^2)$ を満たす互いに素な正の奇数 a, b があるとき

$9a^2 - b^2 \equiv 9 - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, $5a^2 - b^2 \equiv 5 - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ を考えて

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{9a^2 - b^2}{4} \cdot \frac{5a^2 - b^2}{4} \tag{11}$$

$a^2 = \frac{9a^2 - b^2}{4} - \frac{5a^2 - b^2}{4}$ と $b^2 = 5 \cdot \frac{9a^2 - b^2}{4} - 9 \cdot \frac{5a^2 - b^2}{4}$ は互いに素であるか

ら ,

$$\frac{9a^2 - b^2}{4} \text{ と } \frac{5a^2 - b^2}{4} \text{ は互いに素}$$

であり , (11) より

$$9a^2 - b^2 = \pm 4s^2 \quad (12)$$

$$5a^2 - b^2 = \pm 4t^2 \quad (\text{複号同順}) \quad (13)$$

$$y = 2st \quad (14)$$

を満たす互いに素な自然数 s, t が存在する。

$a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから , (12), (13) より

$$\pm 4s^2 = 9a^2 - b^2 \equiv 9 - 1 \equiv 0 \pmod{8}$$

$$\pm 4t^2 = 5a^2 - b^2 \equiv 5 - 1 \equiv 4 \pmod{8}$$

であり , s は偶数 , t は奇数となる。よって ,

$$\pm(4s^2 - 4t^2) = 4a^2 \text{ すなわち } a^2 = \pm(s^2 - t^2)$$

の複号は

$$a^2 = -(s^2 - t^2) \quad \text{注}^5$$

に定まるから , (12), (13) の複号は

$$9a^2 - b^2 = -4s^2 \quad (12)$$

$$5a^2 - b^2 = -4t^2 \quad (13)$$

に定まる。(12) においてピタゴラス方程式の定理^{注5}より

$$3a = m^2 - n^2, \quad 2s = 2mn, \quad b = m^2 + n^2 \quad (15)$$

を満たす互いに素な自然数 m, n が存在する。(13) に代入すると

$$\begin{aligned} 4t^2 &= b^2 - 5a^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 - 5\left(\frac{m^2 - n^2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{9(m^2 + n^2)^2 - 5(m^2 - n^2)^2}{9} \\ &= \frac{4m^4 + 28m^2n^2 + 4n^4}{9} \\ m^4 + 7m^2n^2 + n^4 &= (3t)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

(14), (1) より

$$(3t)^2 \leq (3st)^2 = \frac{9}{4}y^2 < 7y^2 + y^2 \leq 7x^2y^2 + y^4 < z^2$$

であり , (16) が成り立つから , z の最小性より

$$m = n$$

このとき , (15) より

$$3a = m^2 - n^2 = 0$$

となって , 矛盾する。

II B $4y^2 = (9c^2 - 5d^2)(c^2 - d^2)$ を満たす互いに素な正の奇数 c, d があるとき
 $9c^2 - 5d^2 \equiv 9 - 5 \equiv 0 \pmod{4}$, $c^2 - d^2 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ を考えて

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{9c^2 - 5d^2}{4} \cdot \frac{c^2 - d^2}{4} \quad (17)$$

$c^2 = \frac{9c^2 - 5d^2}{4} - 5 \cdot \frac{c^2 - d^2}{4}$ と $d^2 = \frac{9c^2 - 5d^2}{4} - 9 \cdot \frac{c^2 - d^2}{4}$ は互いに素であるから

$$\frac{9c^2 - 5d^2}{4} \text{ と } \frac{c^2 - d^2}{4} \text{ は互いに素}$$

であり, (17)より

$$9c^2 - 5d^2 = \pm 4u^2 \quad (18)$$

$$c^2 - d^2 = \pm 4v^2 \quad (\text{複号同順}) \quad (19)$$

$$y = 2uv \quad (20)$$

を満たす互いに素な自然数 u, v が存在する。

$c^2 \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから, (18), (19)より

$$\pm 4u^2 = 9c^2 - 5d^2 \equiv 9 - 5 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$\pm 4v^2 = c^2 - d^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

であり, u は奇数, v は偶数となる。よって,

$$\pm 4(u^2 - 9v^2) = 4d^2 \text{ すなわち } d^2 = \pm(u^2 - 9v^2)$$

の複号は

$$d^2 = u^2 - 9v^2 \quad \text{注5}$$

に定まるから, (18), (19)の複号は

$$9c^2 - 5d^2 = 4u^2 \quad (18)$$

$$c^2 - d^2 = 4v^2 \quad (19)$$

に定まる。(19)においてピタゴラス方程式の定理^{注5}より

$$c = k^2 + l^2, \quad d = k^2 - l^2, \quad 2v = 2kl \quad (21)$$

を満たす互いに素な自然数 k, l が存在する。(18)に代入すると

$$4u^2 = 9(k^2 + l^2)^2 - 5(k^2 - l^2)^2 = 4k^4 + 28k^2l^2 + 4l^4$$

$$k^4 + 7k^2l^2 + l^4 = u^2 \quad (22)$$

(20), (1)より

$$u^2 < (2uv)^2 = y^2 \leq y^4 < z^2$$

であり, (22)が成り立つから, z の最小性より

$$k = l$$

このとき, (21)より

$$d = k^2 - l^2 = 0$$

となって, 矛盾する。 ■

定理 2 の証明

自然数 a, b, c, d が

$$3a^2 - b^2 = 2c^2, \quad 5a^2 - 3b^2 = 2d^2 \quad (23)$$

を同時に満たすとする。自然数 n に対して

$$2^n | a, \quad 2^n | b \implies 2^{2n} | 2c^2, \quad 2^{2n} | 2d^2 \implies 2^n | c, \quad 2^n | d$$

であることを考えると, $\gcd(a, b) = \delta$ とすれば $\delta | c, \delta | d$ であるから,

a と b は互いに素

であるとして定理 2 を証明すればよい。

$$x = cd, \quad y = ab \quad (24)$$

とおくと

$$4x^2 = 4c^2d^2 = (3a^2 - b^2)(5a^2 - 3b^2) = 15a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & 16(x^4 + 7x^2y^2 + y^4) \\ &= 16\{(x^2 + y^2)^2 + 5x^2y^2\} \\ &= (4x^2 + 4y^2)^2 + 5(4x^2)(4y^2) \\ &= (15a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4 + 4a^2b^2)^2 + 5(15a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4)(4a^2b^2) \\ &= (15a^4 - 10a^2b^2 + 3b^4)^2 + 20a^2b^2(15a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4) \\ &= (15a^4 + 3b^4)^2 - 20a^2b^2(15a^4 + 3b^4) + 100a^4b^4 \\ &\quad + 20a^2b^2(15a^4 + 3b^4) - 280a^4b^4 \\ &= (15a^4 + 3b^4)^2 - 180a^4b^4 \\ &= (15a^4 - 3b^4)^2 \end{aligned} \quad (26)$$

a, b は互いに素であり, (23) より a と b の偶奇は等しいから

$$a \equiv b \equiv 1 \pmod{2}, \quad 15a^4 - 3b^4 \equiv 15 - 3 \equiv 4 \pmod{8}$$

特に $15a^4 - 3b^4$ は 4 で割り切れ, 0 ではないから,

$$z = \left| \frac{15a^4 - 3b^4}{4} \right|$$

とおくと z は自然数であり, (26) より

$$x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たす。よって, 定理 1 より

$$x = y$$

(24), (25) より

$$4a^2b^2 = 4c^2d^2 = 15a^4 - 14a^2b^2 + 3b^4$$

$$15a^4 - 18a^2b^2 + 3b^4 = 0$$

$$5a^4 - 6a^2b^2 + b^4 = 0$$

$$(a^2 - b^2)(5a^4 - b^4) = 0$$

5 は素数で $5a^4 \neq b^4$ であるから

$$a = b$$

であり, (23) より $a = b = c = d$ である。 ■

定理 3 の証明

$$9x^4 - 2x^2y^2 + 9y^4 = z^2 \quad (27)$$

を満たす自然数 x, y, z が存在するとき,

$$X = z|x^2 - y^2|, \quad Y = 4xy(x^2 + y^2)$$

とおくと, (27) より z を消去して

$$\begin{aligned} X^2 &= z^2(x^2 - y^2)^2 \\ &= (9x^4 - 2x^2y^2 + 9y^4)(x^2 - y^2)^2 \\ &= \{9(x^2 - y^2)^2 + 16x^2y^2\}(x^2 - y^2)^2 \\ &= 9(x^2 - y^2)^4 + 16x^2y^2(x^2 - y^2)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} Y^2 &= 16x^2y^2(x^2 + y^2)^2 \\ &= 16x^2y^2\{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2\} \\ &= 16x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + 64x^4y^4 \end{aligned} \quad (29)$$

$$X^4 = 81(x^2 - y^2)^8 + 288x^2y^2(x^2 - y^2)^6 + 256x^4y^4(x^2 - y^2)^4$$

$$X^2Y^2 = 144x^2y^2(x^2 - y^2)^6 + 832x^4y^4(x^2 - y^2)^4 + 1024x^6y^6(x^2 - y^2)^2$$

$$Y^4 = 256x^4y^4(x^2 - y^2)^4 + 2048x^6y^6(x^2 - y^2)^2 + 4096x^8y^8$$

$$X^4 + 7X^2Y^2 + Y^4$$

$$\begin{aligned} &= 81(x^2 - y^2)^8 + 9 \cdot 144x^2y^2(x^2 - y^2)^6 + 6336x^4y^4(x^2 - y^2)^4 \\ &\quad + 9 \cdot 1024x^6y^6(x^2 - y^2)^2 + 64^2x^8y^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 81(x^2 - y^2)^8 + 64^2x^8y^8 \\ &\quad + 144\{9x^2y^2(x^2 - y^2)^6 + 44x^4y^4(x^2 - y^2)^4 + 64x^6y^6(x^2 - y^2)^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{9(x^2 - y^2)^4 + 64x^4y^4\}^2 \\ &\quad + 144\{9x^2y^2(x^2 - y^2)^6 + 36x^4y^4(x^2 - y^2)^4 + 64x^6y^6(x^2 - y^2)^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{9(x^2 - y^2)^4 + 64x^4y^4\}^2 \\ &\quad + 144x^2y^2(x^2 - y^2)^2\{9(x^2 - y^2)^4 + 64x^4y^4\} + 72^2x^4y^4(x^2 - y^2)^4 \end{aligned}$$

$$= \{9(x^2 - y^2)^4 + 72x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + 64x^4y^4\}^2$$

$x \neq y$ ならば, X, Y および $9(x^2 - y^2)^4 + 72x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + 64x^4y^4$ は自然数であるから, 定理 1 より

$$X^2 = Y^2$$

が成り立ち, (28), (29) より

$$9(x^2 - y^2)^4 = 64x^4y^4$$

$$3^2(x^2 - y^2)^4 = 2^6x^4y^4 \quad (30)$$

$x \neq y$ ならば, (30) において両辺の素因数分解が異なるから矛盾する。

よって, (27) を満たす自然数 x, y, z があるとすれば,

$$x = y$$

に限られる。 ■

注1 p を素数とすると、 $p^e \parallel m$ は、整数 m が p でちょうど e 回割り切れる (p^e で割り切れて、 p^{e+1} で割り切れない) ことを表す記号である。

注2 [3] 定理2 に頼らないで本定理が証明できれば、逆に [3] 定理2 の別証明を与えることができる。

$$3x^2 - 2y^2 = a^2, \quad 3y^2 - 2x^2 = b^2$$

を満たす自然数 x, y, a, b が存在するとき、

$$u = ax, \quad v = by$$

とおくと、

$$u^2 = a^2x^2 = x^2(3x^2 - 2y^2)$$

$$v^2 = b^2y^2 = y^2(3y^2 - 2x^2)$$

2式の差をとると

$$u^2 - v^2 = 3(x^4 - y^4) \quad \dots\dots (*)$$

となつて、

$$\begin{aligned} u^4 + 7x^2y^2 + v^4 &= (u^2 - v^2)^2 + 9u^2v^2 \\ &= 9(x^4 - y^4)^2 + 9x^2y^2(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) \\ &= 9\{(x^4 - y^4)^2 + x^2y^2(-6x^4 + 13x^2y^2 - 6y^4)\} \\ &= 9\{(x^4 + y^4)^2 - 4x^4y^4 - 6x^2y^2(x^4 + y^4) + 13x^4y^4\} \\ &= 9\{(x^4 + y^4)^2 - 6x^2y^2(x^4 + y^4) + 9x^4y^4\} \\ &= 9(x^4 - 3x^2y^2 + y^4)^2 \end{aligned}$$

本稿の定理1より

$$u = v$$

が成り立つから、(*)より $x = y$ が得られる。

注3 (2)の変形一本で場合分けしていくと、論じる量が増えることもあるが、 $3 \mid xy$ の場合には(2)の変形では証明が困難な状況に陥ってしまう。場合ごとに用いる式を変えろという工夫は、[1]においても行われた。

注4 $7x^2 + 2y^2 + 2z$ と $7x^2 + 2y^2 - 2z$ は互いに素であるから、

$$(7x^2 + 2y^2 + 2z, 7x^2 + 2y^2 - 2z) = (15m^4, 3n^4), (3n^4, 15m^4)$$

を満たす自然数 m, n が存在する場合は含まれない。

注5 互いに素な正の整数 a, b, c がピタゴラス方程式

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{31}$$

を満たすとき、

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2 \tag{32}$$

または

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2 \tag{33}$$

を満たす偶奇が異なる互いに素な正の整数 m, n が存在する。また、互いに素な正

の整数 a, b, c に対して

$a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つとき、 a と b の偶奇は異なり、 c は奇数

となることも定理 1 の証明に用いている。

ピタゴラス方程式の定理の証明は文献 [2] の注にも載せてあるが、ここにも転記しておこう。

a と b は互いに素であるから、少なくとも一方は奇数であるが、対称性より

b は奇数

であると仮定して、(32) を導けば十分である。

ここで、 a, b がともに奇数であるとすれば、

$$a = 2\alpha + 1, \quad b = 2\beta + 1 \quad (\alpha, \beta \text{ は整数})$$

と表されて

$$a^2 + b^2 = 4(\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta) + 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

となるから、平方数 c^2 と等しくならない。よって、

a は偶数、 b と c は奇数

である。

(31) を変形すると

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$$

$$\therefore \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c+b}{2} \cdot \frac{c-b}{2} \tag{34}$$

b, c は奇数であるから

$$\frac{c+b}{2}, \frac{c-b}{2} \text{ はともに整数}$$

であり、 $b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{8}$ より

$$a^2 = c^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

であるから、 $\frac{a}{2}$ は偶数である。

$$b = \frac{c+b}{2} - \frac{c-b}{2}, \quad c = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{2}$$

は互いに素である(共通の素因数をもたない)から、

$$\frac{c+b}{2} \text{ と } \frac{c-b}{2} \text{ は互いに素}$$

であり、(34) より

$$\frac{a}{2} = mn, \quad \frac{c+b}{2} = m^2, \quad \frac{c-b}{2} = n^2$$

となる互いに素な正の整数 m, n が存在する。

$$\frac{a}{2} = mn \text{ は偶数}$$

であるから、 m と n の一方は偶数で、他方は奇数である。

(おわり)

参考文献

- [1] 大塚美紀生, 方程式 $27x^4 + 9x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2011)
<http://wasmath.la.coocan.jp/27x4+9x2y2+y4=z2.pdf>
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解とその応用,
早稲田数学フォーラム (2017)
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+6x2y2+y4=z2.pdf>
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $(3x^2 - 2y^2)(3y^2 - 2x^2) = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2019)
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(3x2-2y2\)\(3y2-2x2\)=z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(3x2-2y2)(3y2-2x2)=z2.pdf)