

# 方程式 $x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

方程式  $x^4 + kx^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解を求める問題において,  $k = 5, 6$  のときは非自明解なし,  $k = 7$  のときは  $x = y$  という結果を得たが,  $k = 8$  のときは, またしても予想外の結果である。

定理 方程式

$$x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

を満たす互いに素な自然数の組  $(x, y, z)$  は無数にある。

定理の証明

$$x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 7$$

とし,

$$x_n^4 + 8x_n^2y_n^2 + y_n^4 = z_n^2, \quad \gcd(x_n, y_n, z_n) = 1 \quad (2)$$

を満たす自然数  $x_n, y_n, z_n$  に対して  $x_{n+1}, y_{n+1}$  を

$$x_{n+1} = 2x_ny_nz_n, \quad y_{n+1} = |x_n^4 - y_n^4| \quad \text{注}^1 \quad (3)$$

で定めるとき,  $x_{n+1} \geq 2x_n > x_n, x_{n+1} \geq 2y_n > y_n$  より

$$\max\{x_{n+1}, y_{n+1}\} \geq x_{n+1} > \max\{x_n, y_n\}$$

であるから,  $x_{n+1}^4 + 8x_{n+1}^2y_{n+1}^2 + y_{n+1}^4 = z_{n+1}^2$  を満たす自然数  $z_{n+1}$  が存在することと,  $x_{n+1}$  と  $y_{n+1}$  が互いに素であることが示されれば, (1) を満たす自然数の組  $(x_n, y_n, z_n)$  が無限個存在することになり, 定理の証明は終わる。

(3)より

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= 4x_n^2y_n^2z_n^2 = 4x_n^2y_n^2(x_n^4 + 8x_n^2y_n^2 + y_n^4) \\ y_{n+1}^2 &= (x_n^4 - y_n^4)^2 = (x_n^4 + y_n^4)^2 - 4x_n^4y_n^4 \end{aligned} \quad (4)$$

ここで,

$$x_n^4 + y_n^4 = u, \quad x_n^2y_n^2 = v$$

とおくと,

$$\begin{aligned} &x_{n+1}^4 + 8x_{n+1}^2y_{n+1}^2 + y_{n+1}^4 \\ &= \{4v(u + 8v)\}^2 + 8 \cdot 4v(u + 8v)(u^2 - 4v^2) + (u^2 - 4v^2)^2 \\ &= 16v^2(u^2 + 16uv + 64v^2) \\ &\quad + 32(u^3v + 8u^2v^2 - 4uv^3 - 32v^4) + u^4 - 8u^2v^2 + 16v^4 \\ &= u^4 + 32u^3v + 264u^2v^2 + 128uv^3 + 16v^4 \\ &= (u^2 + 4v^2)^2 + 32u^3v + 256u^2v^2 + 128uv^3 \\ &= (u^2 + 4v^2)^2 + 32uv(u^2 + 4v^2) + 256u^2v^2 \\ &= (u^2 + 4v^2 + 16uv)^2 \end{aligned}$$

$$= \{(x_n^4 + y_n^4)^2 + 16x_n^2y_n^2(x_n^4 + y_n^4) + 4x_n^4y_n^4\}^2$$

となつて,  $x_{n+1}^4 + 8x_{n+1}^2y_{n+1}^2 + y_{n+1}^4 = z_{n+1}^2$  を満たす自然数

$$z_{n+1} = u^2 + 16uv + 4v^2$$

$$= (x_n^4 + y_n^4)^2 + 16x_n^2y_n^2(x_n^4 + y_n^4) + 4x_n^4y_n^4$$

が存在する。

次に, (2)より

$x_n$  と  $y_n$  は互いに素<sup>注2</sup>

であることを注意しておく。  $x_n, y_n$  がともに奇数であるとすれば,  $x_n^2 \equiv y_n^2 \equiv 1 \pmod{8}$  であるから  $x_n^4 + 8x_n^2y_n^2 + y_n^4 \equiv 1 + 8 + 1 \equiv 2 \pmod{8}$  となつて, (2)のもとでは  $z_n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$  と矛盾するから,

$x_n$  と  $y_n$  の偶奇は異なる。

$x_{n+1}$  と  $y_{n+1}$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば,  $p | x_n^4 - y_n^4$  より

$p$  は奇素数 ( $p \neq 2$ )

であり,  $p | x_{n+1}^2$  および (4)より

$$p | x_n^2 \text{ または } p | y_n^2 \text{ または } p | x_n^4 + 8x_n^2y_n^2 + y_n^4$$

ここで  $p | x_n^2$  または  $p | y_n^2$  のときは,  $p | x_n^4 - y_n^4$  より  $p | x_n$  かつ  $p | y_n$  となつて互いに素であることに反するから

$$p | x_n^4 + 8x_n^2y_n^2 + y_n^4, \quad p \nmid x_n, \quad p \nmid y_n$$

である。

$$\begin{aligned} x_n^4 + 8x_n^2y_n^2 + y_n^4 &= (x_n^2 + y_n^2)^2 + 6x_n^2y_n^2 \\ &= (x_n^2 - y_n^2)^2 + 10x_n^2y_n^2 \end{aligned}$$

であり,  $p | y_{n+1} = (x_n^2 + y_n^2) | x_n^2 - y_n^2$  より

$$p | x_n^2 + y_n^2 \text{ または } p | x_n^2 - y_n^2$$

であるから,

$$p = 3 \text{ または } p = 5$$

の場合に限られる。

$x_1 = 1, y_1 = 2$  および (2)より,  $x_n^2$  と  $y_n^2$  をそれぞれ 3 および 5 で割った余りは

$n$	1	2	3	4以上
$x_n^2 \pmod{3}$	1	1	0	0
$y_n^2 \pmod{3}$	1	0	1	1
$x_n^2 \pmod{5}$	1	4	0	0
$y_n^2 \pmod{5}$	4	0	1	1

となる<sup>注3</sup> から, 共通の素因数  $p$  が 3 および 5 になることはなく,

$x_{n+1}$  と  $y_{n+1}$  は互いに素

である。 ■

注 1 (1)の正の原始解が(3)で尽くされるわけではない。漸化式(3)は(1)を変形した際の3つの場合のうちの1つを逆算したものである。他の2つの場合は処理が複雑なので、すべての原始解の表示を求めることは断念した。

注 2 定理の表現を簡潔にするために  $x_n, y_n, z_n$  が互いに素であるとしたが、6, 10, 15 のように、3数が互いに素であってもそのうちの2数が互いに素であるとは限らない。

注 3  $x_{n+1}$  と  $y_{n+1}$  の共通の素因数を(3), (4)だけで考えると、 $x_n^2 \equiv y_n^2 \pmod{5}$  となる場合があれば  $x_{n+1}$  と  $y_{n+1}$  はともに5で割り切れ、互いに素であることは示せない。漸化式を用いて、実際に起こり得る場合に絞れたことがポイントである。

#### 参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生, ディオファントス方程式  $5x^4 - y^4 = 4z^2$  について,  
早稲田数学フォーラム (2012),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/5x4-y4=4z2.pdf>
- [3] 大塚美紀生, 方程式  $x^4 + 7y^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解,  
早稲田数学フォーラム (2019),  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+7y2y2+y4=z2.pdf>