

ディオファントス方程式 $x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = z^2$ の原始解

大塚美紀生

[4]において、方程式 $x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解は無数にあることを示したが、原始解をすべて求めるのは作業量が多く^{注1}、無数解の一例を求めるにとどまった。本稿では、[5]に感化されたこともあって、原始解を完全に求めてみた。結果的には、[4]で見出した原始解以外には存在しないことを証明したことになる。

定理 不定方程式

$$x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = z^2$$

の整数解は無数にあり、正の原始解^{注2} $(x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$ で x が偶数^{注3} であるものは、次の漸化式で定まるもので尽くされる。

$$\begin{aligned} x_1 &= 2, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 7, \\ x_{n+1} &= 2x_n y_n z_n, \quad y_{n+1} = x_n^4 - y_n^4, \quad z_{n+1} = z_n^4 - 60x_n^4 y_n^4 \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

定理の証明

互いに素な自然数 x, y, z ^{注4} が

$$x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{1}$$

を満たすとする。このとき、

x と y は互いに素^{注4}

である。ここで、 x と y がともに奇数であるとすれば、 $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{4}$ 、 $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ となって(1)が成り立たないから、 x と y の偶奇は異なる。 x と y について対称であることを考えて

x は偶数、 y は奇数、 z は奇数

として正の原始解を求めれば十分である。

(1)を変形して

$$\begin{aligned} (x^2 + 4y^2)^2 - 15y^4 &= z^2 \\ (x^2 + 4y^2)^2 - z^2 &= 15y^4 \\ (x^2 + 4y^2 + z)(x^2 + 4y^2 - z) &= 15y^4 \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、 $x^2 + 4y^2 + z$ と $x^2 + 4y^2 - z$ が共通の素因数 p をもつとすれば、 p は奇素数であり、 $p \mid 2(x^2 + 4y^2)$ 、 $p^2 \mid 15y^4 \implies p \mid x^2 + 4y^2$ 、 $p \mid y \implies p \mid x$ 、 $p \mid y$ となって、互いに素であることに反するから

$x^2 + 4y^2 + z$ と $x^2 + 4y^2 - z$ は互いに素

である。(2)より

$$\begin{aligned}
(x^2 + 4y^2 + z, x^2 + 4y^2 - z, y) &= (15a^4, b^4, ab), \\
&= (b^4, 15a^4, ab), \\
&= (5a^4, 3b^4, ab), \\
&= (3b^4, 5a^4, ab)
\end{aligned}$$

のいずれかを満たす互いに素な正の奇数 a, b が存在し,

$$y = ab \tag{3}$$

$$2(x^2 + 4y^2) = 15a^4 + b^4 \text{ または } 5a^4 + 3b^4$$

が成り立つ。 y を消去すると

$$2x^2 = 15a^4 - 8a^2b^2 + b^4 = (5a^2 - b^2)(3a^2 - b^2)$$

または

$$2x^2 = 5a^4 - 8a^2b^2 + 3b^4 = (a^2 - b^2)(5a^2 - 3b^2)$$

I $2x^2 = (5a^2 - b^2)(3a^2 - b^2)$ のとき

$5a^2 - b^2 \equiv 0, 3a^2 - b^2 \equiv 2 \pmod{4}$ より $\frac{5a^2 - b^2}{4}, \frac{3a^2 - b^2}{2}$ は整数であり,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{5a^2 - b^2}{4} \cdot \frac{3a^2 - b^2}{2}$$

$2 \cdot \frac{5a^2 - b^2}{4} - \frac{3a^2 - b^2}{2} = a^2$ と $6 \cdot \frac{5a^2 - b^2}{4} - 5 \cdot \frac{3a^2 - b^2}{2} = b^2$ が互いに素である

ことより

$$\frac{5a^2 - b^2}{4} \text{ と } \frac{3a^2 - b^2}{2} \text{ は互いに素}$$

であるから,

$$(x, 5a^2 - b^2, 3a^2 - b^2) = (2gh, 4g^2, 2h^2) \text{ または } (2gh, -4g^2, -2h^2)$$

を満たす互いに素な自然数 g, h が存在する。 $5a^2 - b^2 \equiv 4, 3a^2 - b^2 \equiv 2 \pmod{8}$ より g, h は奇数であり,

$$x = 2gh \tag{4}$$

$$5a^2 - b^2 = 4g^2 \tag{5}$$

$$3a^2 - b^2 = 2h^2 \tag{6}$$

に定まる。

(5) に [3] 定理 1 を適用すると, ^{注5}

$$b \neq g$$

のときは, 互いに素な自然数 k, ℓ を用いて

$$(a, b, g) = (k^2 + \ell^2, k^2 - 4k\ell - \ell^2, k^2 + k\ell - \ell^2),$$

$$(k^2 + \ell^2, k^2 + 4k\ell - \ell^2, k^2 - k\ell - \ell^2),$$

$$(k^2 + \ell^2, -k^2 + 4k\ell + \ell^2, k^2 + k\ell - \ell^2)$$

のいずれかで表されるもので尽くされるが, $\ell > 0$ の仮定をはずすと,

$$a = k^2 + \ell^2, g = k^2 + k\ell - \ell^2 \tag{7}$$

を満たす互いに素な整数 k, ℓ ($k > 0, \ell \neq 0$) を用いて表される。

(5) - (6) より

$$2a^2 = 4g^2 - 2h^2$$

$$a^2 + h^2 = 2g^2$$

$$\left(\frac{a+h}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-h}{2}\right)^2 = g^2$$

$\frac{a+h}{2}$ と $\frac{a-h}{2}$ が共通の素因数 p をもつとすれば, $p|a$ かつ $p|h$ かつ $p|g$ と

なって g と h が互いに素であることに反するから,

$$\frac{a+h}{2} \text{ と } \frac{a-h}{2} \text{ は互いに素}$$

である。

$$a \neq h$$

のとき, ピタゴラス方程式の定理^{注6} より

$$\left(\frac{a+h}{2}, \frac{|a-h|}{2}, g\right) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

または

$$(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$$

を満たす互いに素な偶奇の異なる自然数 m, n が存在する。

$a > h$ のときは

$$a = m^2 + 2mn - n^2,$$

$a < h$ のときは

$$a = m^2 - 2mn - n^2 \text{ または } -m^2 + 2mn + n^2$$

であるが, 必要ならば n と $-n$, もしくは m と n を入れ替えることにより,

$$a = m^2 + 2mn - n^2, \quad g = m^2 + n^2 \tag{8}$$

を満たす互いに素な整数 m, n ($m > 0, n \neq 0$) を用いて表される。^{注7}

(7), (8) より

$$k^2 + \ell^2 = m^2 + 2mn - n^2 \tag{9}$$

$$k^2 + k\ell - \ell^2 = m^2 + n^2 \tag{10}$$

(9) + (10) より

$$2k^2 + k\ell = 2m^2 + 2mn$$

$$k(2k + \ell) = 2m(m + n) \tag{11}$$

$\gcd(k, m) = s$ とおくと,

$$k = st, \quad m = su \tag{12}$$

を満たす互いに素な自然数 t, u が存在する。(11)より

$$t(2k + \ell) = 2u(m + n)$$

t と u は互いに素であるから

$$2k + \ell = uv, \quad 2(m + n) = tv \tag{13}$$

を満たす整数 v が存在する。 $m + n$ は奇数であるから $v \neq 0$ である。

(12), (13) より

$$\ell = uv - 2st, \quad n = \frac{tv}{2} - su \quad (14)$$

(12), (14) を (10) に代入して

$$s^2 t^2 + st(uv - 2st) - (uv - 2st)^2 = s^2 u^2 + \left(\frac{tv}{2} - su\right)^2$$

$$stuv - 5s^2 t^2 - u^2 v^2 = 2s^2 u^2 - stuv + \frac{t^2 v^2}{4}$$

$$s^2(5t^2 + u^2) - 2stuv + \frac{t^2 + 4u^2}{4} v^2 = 0$$

$$(5t^2 + u^2) \left(\frac{s}{v}\right)^2 - 2tu \cdot \frac{s}{v} + \frac{t^2 + 4u^2}{4} = 0$$

有理数 $\frac{s}{v}$ が存在することより,

$$\begin{aligned} (\text{判別式}) &= 4t^2 u^2 - 4(5t^2 + u^2) \cdot \frac{t^2 + 4u^2}{4} \\ &= 4t^2 u^2 - (5t^2 + u^2)(t^2 + 4u^2) \\ &= -5t^4 - 17t^2 u^2 - 4u^4 \end{aligned}$$

は平方数でなければならないが, 負であるから矛盾する。

以上より, $b \neq g$ かつ $a \neq h$ としたことが誤りであるから,

$$b = g \quad \text{または} \quad a = h$$

$b = g$ のときは, (5) より

$$a = b = g$$

$a = h$ のときは, (6) より

$$a = b = h$$

いずれの場合も

$$a = b = g = h$$

(4), (3) より

$$x = 2g^2, \quad y = g^2$$

x と y は互いに素であるから

$$x = 2, \quad y = 1$$

II $2x^2 = (a^2 - b^2)(5a^2 - 3b^2)$ のとき

$a^2 - b^2 \equiv 0, \quad 5a^2 - 3b^2 \equiv 2 \pmod{4}$ より $\frac{a^2 - b^2}{4}, \frac{5a^2 - 3b^2}{2}$ は整数であり,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \frac{5a^2 - 3b^2}{2}$$

$\frac{5a^2 - 3b^2}{2} - 6 \cdot \frac{a^2 - b^2}{4} = a^2$ と $\frac{5a^2 - 3b^2}{2} - 10 \cdot \frac{a^2 - b^2}{4} = b^2$ は互いに素である

ることより

$$\frac{a^2 - b^2}{4} \text{ と } \frac{5a^2 - 3b^2}{2} \text{ は互いに素}$$

であるから,

$(x, a^2 - b^2, 5a^2 - 3b^2) = (2gh, 4g^2, 2h^2)$ または $(2gh, -4g^2, -2h^2)$ を満たす互いに素な自然数 g, h が存在する。 $a^2 - b^2 \equiv 0, 5a^2 - 3b^2 \equiv 2 \pmod{8}$ より,

$$x = 2gh \tag{15}$$

$$a^2 - b^2 = 4g^2 \tag{16}$$

$$5a^2 - 3b^2 = 2h^2 \tag{17}$$

に定まる。(16)にピタゴラス方程式の定理^{注6}を適用すると

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2, \quad 2g = 2mn \tag{18}$$

を満たす互いに素な偶奇の異なる自然数 m, n が存在する。(17)に代入すると

$$\begin{aligned} 5(m^2 + n^2)^2 - 3(m^2 - n^2)^2 &= 2h^2 \\ m^4 + 8m^2n^2 + n^4 &= h^2 \end{aligned} \tag{19}$$

が得られる。

逆に辿ると, (19)を満たす自然数 m, n, h に対して, (18)より

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2, \quad g = mn$$

(15), (3) より

$$x = 2mnh \tag{20}$$

$$y = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = m^4 - n^4 \tag{21}$$

(1) より

$$\begin{aligned} z^2 &= x^4 + 8x^2y^2 + y^4 \\ &= 16m^4n^4(m^4 + 8m^2n^2 + n^4)^2 \\ &\quad + 8 \cdot 4m^2n^2(m^4 + 8m^2n^2 + n^4)(m^4 - m^4)^2 \\ &\quad + (m^4 - n^4)^4 \\ &= 16m^4n^4\{(m^4 + n^4)^2 + 16m^2n^2(m^4 + n^4) + 64m^4n^4\} \\ &\quad + 32m^2n^2(m^4 + n^4 + 8m^2n^2)\{(m^4 + n^4)^2 - 4m^4n^4\} \\ &\quad + \{(m^4 + n^4)^2 - 4m^4n^4\}^2 \end{aligned}$$

$m^4 + n^4 = s, \quad m^2n^2 = t$ とおくと

$$\begin{aligned} z^2 &= 16t^2(s^2 + 16st + 64t^2) + 32t(s + 8t)(s^2 - 4t^2) + (s^2 - 4t^2)^2 \\ &= 16(s^2t^2 + 16st^3 + 64t^4) + 32(s^3t + 8s^2t^2 - 4st^3 - 32t^4) \\ &\quad + s^4 - 8s^2t^2 + 16t^4 \\ &= s^4 + 32s^3t + (8 + 32 \cdot 8)s^2t^2 + 32 \cdot 4st^3 + 16t^4 \\ &= (s^2 + 4t^2)^2 + 32(s^3t + 8s^2t^2 + 4st^3) \\ &= (s^2 + 4t^2)^2 + 32st(s^2 + 4t^2) + 16^2s^2t^2 \\ &= (s^2 + 16st + 4t^2)^2 \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
z &= s^2 + 16st + 4t^2 \\
&= (m^4 + n^4)^2 + 16m^2n^2(m^4 + n^4) + 4m^4n^4 \\
&= (m^4 + 8m^2n^2 + n^4)^2 - 60m^4n^4 \\
&= (h^2)^2 - 60m^4n^4
\end{aligned} \tag{22}$$

m, n のうちの偶数が 4 の倍数のときは II の議論を繰り返すことができ、4 で割れない偶数のときは I より

$$(m, n, h) = (2, 1, 3) \text{ または } (1, 2, 3)$$

に限られるから、 x が偶数である正の原始解は

$$x_1 = 2, y_1 = 1, z_1 = 3$$

から始めて、(20), (21), (22) による漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n y_n z_n \\ y_{n+1} = x_n^4 - y_n^4 \\ z_{n+1} = z_n^4 - 60x_n^4 y_n^4 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定まる $(x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$ に限られる。(20), (1) より

$$h^2 < 4g^2 h^2 = x^2 < x^4 < z^2 \text{ したがって } z_n < z_{n+1}$$

であるから、正の原始解は無数に存在する。

■

注1 作業が大変だったのは、当時の方針によるとである。[5]を参考にすることで、全体構造が見渡しやすいものに改められた。

注2 自然数解 (x_0, y_0, z_0) が一つ見つかり、任意の整数 d に対して (x_0d, y_0d, z_0d) も整数解となるから、単に無数にあるというだけでは意味がない。原始解 (x, y, z) が互いに素である整数解が無数個ということになれば、本質的な意味で無数個ということになる。

注3 x, y がともに奇数であるとすれば、 $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{4}$ より(1)は成り立たないから、互いに素であるとすれば x と y の偶奇は異なる。 x と y について対称なので、 x が偶数の場合を求めるだけで一般に求めたことになる。

注4 3数が互いに素であることとそのうちの2数が互いに素であることとは意味が異なる。例えば、3数6, 10, 15は互いに素であるが、そのうちのどの2数も互いに素ではない。(1)が成り立つ前提では、 x と y が共通の素因数 p をもつとすれば、 $p^4 | z^2$ より z も p で割り切れてしまうので、 x と y は互いに素であることがわかる。

注5 [3]で予言したように、その時点では予想できなかったディオファントス方程式 $x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = z^2$ の原始解という「思わぬ結果」につながったことになる。

注6 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき、

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は読者に委ねるが、必要ならば[1] pp.20-22などを参照されるとよい。

注7 [2]の定理1を引用するだけで済ませたかったが、本稿で用いる設定と微妙に異なっていたので、改めて整理し直すことにした。

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生, 等差数列をなす平方数について,
早稲田数学フォーラム (2019),
<http://wasmath.la.coocan.jp/arithmatic-square.pdf>
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $(5x^2 - 4y^2)(5y^2 - 4x^2) = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2020),
[http://wasmath.la.coocan.jp/\(5x2-4y2\)\(5y2-4x2\)=z2.pdf](http://wasmath.la.coocan.jp/(5x2-4y2)(5y2-4x2)=z2.pdf)
- [4] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2020),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+8x2y2+y4=z2.pdf>
- [5] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 12x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解,
早稲田数学フォーラム (2021),
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+12x2y2+y4=z2.pdf>