

方程式 $x^4 + 9x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解

大塚美紀生

定理 不定方程式

$$x^4 + 9x^2y^2 + y^4 = z^2 \quad (1)$$

を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

定理の証明

(1) を満たす自然数 x, y, z が存在すると仮定して、そのうち z が最小

となる場合を考えることにする。

$d = \gcd(x, y)$ とすると、(1) より $d^4 \mid z^2$ であるから

$$x = dx_1, \quad y = dy_1, \quad z = d^2z_1$$

となる自然数 x_1, y_1, z_1 が存在し、

$$x_1^4 + 9x_1^2y_1^2 + y_1^4 = z_1^2$$

を満たすから、

x と y が互いに素

であるとして証明すれば十分である。

ここで x と y がともに奇数であるとすれば、

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad x^4 + 9x^2y^2 + y^4 \equiv 3 \pmod{4}$$

となって $z^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ と矛盾するから、

x と y の偶奇は異なる。

対称性より

x が奇数、 y が偶数

であるとしてよい。

平方数を 7 で割った余りは 0, 1, 4, 2 のいずれかであるから、整数 m, n に対して

$$m^2 + n^2 \equiv 0 \pmod{7} \iff m \equiv n \equiv 0 \pmod{7}$$

であり、 x と y が互いに素であるから、

$$x^2 + y^2 \not\equiv 0 \pmod{7}$$

(1) を変形して

$$(x^2 + y^2)^2 + 7x^2y^2 = z^2$$

$$7x^2y^2 = (z + x^2 + y^2)(z - x^2 - y^2) \quad (2)$$

$z + x^2 + y^2$ と $z - x^2 - y^2$ の少なくとも一方は 7 で割れるが、

$$z + x^2 + y^2 - (z - x^2 - y^2) = 2(x^2 + y^2) \not\equiv 0 \pmod{7}$$

より

$z + x^2 + y^2$ 、 $z - x^2 - y^2$ の一方は 7 で割れ、他方は 7 で割れない。

1° $7 \nmid z + x^2 + y^2$, $7 \mid z - x^2 - y^2$ のとき

$$\frac{z + x^2 + y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素な自然数}) \quad (3)$$

とおくと, $7 \nmid m$ であり,

$$z = \frac{m-n}{n}x^2 - y^2$$

(1)に代入すると

$$\begin{aligned} x^4 + 9x^2y^2 &= \frac{(m-n)^2}{n^2}x^4 - 2 \cdot \frac{m-n}{n}x^2y^2 \\ \frac{2m+7n}{n}x^2y^2 &= \frac{m^2-2mn}{n^2}x^4 \\ \therefore \frac{y^2}{x^2} &= \frac{m(m-2n)}{n(2m+7n)} \end{aligned} \quad (4)$$

$\gcd(m, n) = 1$, $7 \nmid m$ より

$$\begin{aligned} \gcd(m, 2m+7n) &= \gcd(m, 7n) = \gcd(m, 7) = 1 \\ \gcd(m-2n, n) &= \gcd(m, n) = 1 \\ \gcd(m-2n, 2m+7n) &= \gcd(m-2n, 2(m-2n)+11n) \\ &= \gcd(m-2n, 11n) \\ &= \gcd(m-2n, 11) \\ &= 1 \text{ または } 11 \end{aligned}$$

$m(m-2n)$ は偶数, $n(2m+7n)$ は奇数であるから

$$\begin{aligned} \gcd(m, m-2n) &= \gcd(m, 2n) = \gcd(m, 2) = 2 \\ \gcd(n, 2m+7n) &= \gcd(n, 2m) = \gcd(n, 2) = 1 \end{aligned}$$

IA $7 \nmid z + x^2 + y^2$, $\gcd(m-2n, 2m+7n) = 1$ のとき

(4)より

$$m = 2a^2, \quad m-2n = 2b^2, \quad n = c^2, \quad 2m+7n = d^2$$

を満たすようななどの2つも互いに素な自然数 a, b, c, d (c, d は正の奇数) が存在し, m, n を消去すると

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad (5)$$

$$4a^2 + 7c^2 = d^2 \quad (6)$$

が得られる。(5)において, b が奇数であるとすれば

$$a^2 = b^2 + c^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

となって $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ と矛盾するから,

b は偶数, a は奇数

である。このとき, (6)において

$$d^2 = 4a^2 + 7c^2 \equiv 4 + 7 \equiv 3 \pmod{4}$$

となって $d^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ と矛盾する。

IB $7 \nmid z + x^2 + y^2$, $\gcd(m - 2n, 2m + 7n) = 11$ のとき

(4) より

$$m = 2a^2, \quad m - 2n = 22b^2, \quad n = c^2, \quad 2m + 7n = 11d^2 \quad (7)$$

を満たすようななどの 2 つも互いに素な自然数 a, b, c, d (c, d は正の奇数) が存在し, m, n を消去すると

$$a^2 - c^2 = 11b^2 \quad (8)$$

$$4a^2 + 7c^2 = 11d^2 \quad (9)$$

が得られる。(9) - (8) $\times 4$ より

$$\begin{aligned} 11c^2 &= 11d^2 - 44b^2 \\ 4b^2 + c^2 &= d^2 \end{aligned} \quad (10)$$

(8) $\times 7$ + (9) より

$$\begin{aligned} 11a^2 &= 77b^2 + 11d^2 \\ a^2 &= 7b^2 + d^2 \end{aligned} \quad (11)$$

(10) にピタゴラス方程式についての定理^{注1}を適用すると,

$$2b = 2k\ell, \quad c = k^2 - \ell^2, \quad d = k^2 + \ell^2, \quad k \not\equiv \ell \pmod{2}$$

を満たす互いに素な自然数 k, ℓ が存在するから, (11) に代入すると

$$\begin{aligned} a^2 &= 7k^2\ell^2 + (k^2 + \ell^2)^2 \\ &= k^4 + 9k^2\ell^2 + \ell^4 \end{aligned}$$

(7), (4), (1) より

$$a^2 < 4a^2b^2 = y^2 < z \leq z^2$$

であるから, z の最小性に反する。

2° $7 \nmid z - x^2 - y^2$, $7 \mid z + x^2 + y^2$ のとき

$$\frac{z - x^2 - y^2}{x^2} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ は互いに素な自然数}) \quad (12)$$

とおくと, $7 \nmid m$ であり,

$$z = \frac{m+n}{n}x^2 + y^2$$

(1) に代入すると

$$\begin{aligned} x^4 + 9x^2y^2 &= \frac{(m+n)^2}{n^2}x^4 + 2 \cdot \frac{m+n}{n}x^2y^2 \\ \frac{7n-2m}{n}x^2y^2 &= \frac{m^2+2mn}{n^2}x^4 \\ \therefore \frac{y^2}{x^2} &= \frac{m(m+2n)}{n(7n-2m)} \end{aligned} \quad (13)$$

$\gcd(m, n) = 1$, $7 \nmid m$ より

$$\gcd(m, 7n - 2m) = \gcd(m, 7n) = \gcd(m, 7) = 1$$

$$\begin{aligned}
\gcd(m+2n, n) &= \gcd(m, n) = 1 \\
\gcd(m+2n, 7n-2m) &= \gcd(m+2n, 11n-2(m+2n)) \\
&= \gcd(m+2n, 11n) \\
&= \gcd(m+2n, 11) \\
&= 1 \text{ または } 11
\end{aligned}$$

$m(m+2n)$ は偶数, $n(7n-2m)$ は奇数であるから

$$\begin{aligned}
\gcd(m, m+2n) &= \gcd(m, 2n) = \gcd(m, 2) = 2 \\
\gcd(n, 7n-2m) &= \gcd(n, 2m) = \gcd(n, 2) = 1
\end{aligned}$$

IIA $7 \nmid z - x^2 - y^2$, $\gcd(m+2n, 7n-2m) = 1$ のとき

(13)より

$$m = 2a^2, \quad m+2n = 2b^2, \quad n = c^2, \quad 7n-2m = d^2$$

を満たすようななどの2つも互いに素な自然数 a, b, c, d (c, d は正の奇数) が存在し, m, n を消去すると

$$a^2 + c^2 = b^2 \tag{14}$$

$$7c^2 - 4a^2 = d^2 \tag{15}$$

が得られる。(14)において, a が奇数であるとすれば

$$b^2 = a^2 + c^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

となって $b^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ と矛盾するから,

a は偶数, b は奇数

である。このとき, (15)において

$$d^2 = 7c^2 - 4a^2 \equiv 7 - 4 \equiv 3 \pmod{4}$$

となって $d^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ と矛盾する。

IIB $7 \nmid z - x^2 - y^2$, $\gcd(m+2n, 7n-2m) = 11$ のとき

(13)より

$$m = 2a^2, \quad m+2n = 22b^2, \quad n = c^2, \quad 7n-2m = 11d^2$$

を満たすようななどの2つも互いに素な自然数 a, b, c, d (c, d は正の奇数) が存在し, m, n を消去すると

$$a^2 + c^2 = 11b^2 \tag{16}$$

$$7c^2 - 4a^2 = 11d^2 \tag{17}$$

が得られる。(16) $\times 4$ + (17) より

$$\begin{aligned}
11c^2 &= 44b^2 + 11d^2 \\
c^2 &= 4b^2 + d^2
\end{aligned} \tag{18}$$

(16) $\times 7$ - (17) より

$$\begin{aligned}
11a^2 &= 77b^2 - 11d^2 \\
a^2 &= 7b^2 - d^2
\end{aligned} \tag{19}$$

(18)にピタゴラス方程式についての定理^{注1}を適用すると,

$$c = k^2 + \ell^2, \quad 2b = 2k\ell, \quad d = k^2 - \ell^2, \quad k \not\equiv \ell \pmod{2}$$

を満たす互いに素な自然数 k, ℓ が存在するから, (19)に代入すると

$$\begin{aligned} a^2 &= 7k^2\ell^2 - (k^2 - \ell^2)^2 \\ &= -k^4 + 9k^2\ell^2 - \ell^4 \end{aligned}$$

$k \not\equiv \ell \pmod{2}$ より

$$-k^4 + 9k^2\ell^2 - \ell^4 \equiv -1 \pmod{4}$$

となって, $a^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ と矛盾する。 ■

注1 互いに素な自然数 x, y, z がピタゴラス方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たすとき,

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

または

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2$$

であるような偶奇が異なる互いに素な自然数 m, n が存在する。

証明は, [1] pp.20-22 または [2] 注5 を参照のこと。

参考文献

- [1] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [2] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 7x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解, 早稲田数学フォーラム (2019), <http://wasmath.la.coocan.jp/x4+7x2y2+y4=z2.pdf>
- [3] 大塚美紀生, 方程式 $x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = z^2$ の整数解, 早稲田数学フォーラム (2020), <http://wasmath.la.coocan.jp/x4+8x2y2+y4=z2.pdf>

2020.8.12