

# ディオファントス方程式 $x^4 + y^4 = 2z^2$ について

大塚美紀生

ディオファントス方程式

$$x^4 + y^4 = 2z^2$$

は、方程式  $x^4 + y^4 = 2z^4$  をほんの少し一般化したものになるが、1825年 Schopis によって既に研究されている。今となつては原資料に触れるのは困難であるが、先のレポート [5] と同様の手法で整数解が求められるので、ここに報告する次第である。

定理 1 自然数  $x, y, z$  が

$$x^4 + y^4 = 2z^2 \tag{1}$$

を満たすならば、 $x = y$  が成り立つ。

この定理からすぐに次の定理が得られる。

定理 2 自然数  $x, y, z$  が

$$x^4 + y^4 = 2z^4$$

を満たすならば、 $x = y = z$  が成り立つ。

また、次の定理も容易に導かれる。

定理 3 方程式

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = z^2$$

を満たす自然数  $x, y, z$  は存在しない。

[5] と同様の準備から始める。

補題  $x^2 + y^2 = 2z^2, x \geq y, \gcd(x, y) = 1$

を満たす自然数  $x, y, z$  は、 $m > n \geq 0$  なる互いに素な整数  $m, n$  を用いて

$$x = m^2 + 2mn - n^2, y = |m^2 - 2mn - n^2|, z = m^2 + n^2$$

と表される。

(証明)  $x^2 + y^2 = 2z^2 \tag{2}$

が成り立つとする。(2)より  $x$  と  $y$  の偶奇は等しいから、互いに素であることより、

$$x, y \text{ はともに奇数}$$

である。さらに、 $x = y$  のときは  $n = 0$  のときと解釈すればよく、 $x$  と  $y$  の対称性より

$$x > y$$

のときに補題を証明すれば十分である。

$x$  と  $y$  の相加平均  $\frac{x+y}{2}$  は自然数であるから、これを  $a$  とおくと

$$x = a + b, \quad y = a - b \quad (a, b \text{ は整数}, a > b > 0) \quad \text{注}^1 \quad (3)$$

と表され、(2)より

$$a^2 + b^2 = z^2$$

ここで、 $a$  と  $b$  に共通の素因数  $p$  があるとすれば、(3)より  $p|x$ ,  $p|y$  となって仮定に反するから、

$a$  と  $b$  は互いに素

である。ピタゴラス数についての定理より、偶奇の異なる互いに素な自然数  $m, n$  を用いて

$$(a, b, z) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) \text{ または } (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$$

と表される。<sup>注2</sup>  $m^2 - n^2 > 0$  より  $m > n$  であり、(3)より

$$x = m^2 + 2mn - n^2, \quad y = |m^2 - 2mn - n^2|, \quad z = m^2 + n^2 \quad \blacksquare$$

定理 1 の証明

$$x^4 + y^4 = 2z^2 \quad (1)$$

を満たす自然数の組  $(x, y, z)$  の中で  $x \neq y$  であるものがあれば、そのうち

$z$  が最小

のものが存在する。対称性より

$$x > y > 0$$

の場合だけ考えればよい。

$x$  と  $y$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば、 $p^4 | 2z^2 \Rightarrow p^3 | z^2 \Rightarrow p^2 | z$  となる。この操作を続けることにより、ついには  $z$  が  $\gcd(x, y) = d$  の平方で割れることになるから、 $x \mapsto \frac{x}{d}$ ,  $y \mapsto \frac{y}{d}$ ,  $z \mapsto \frac{z}{d^2}$  と置き換えて論じることにより、はじめから

$$x \text{ と } y \text{ は互いに素} \quad (d = 1)$$

であるとしてよい。(1)より  $x$  と  $y$  の偶奇は等しいことを考えて、

$$x \text{ と } y \text{ はともに奇数}$$

である。

補題により、互いに素な整数  $m, n$  ( $m > n \geq 0$ ) を用いて

$$x^2 = m^2 + 2mn - n^2 \quad (2)$$

$$y = |m^2 - 2mn - n^2| \quad (3)$$

$$z = m^2 + n^2 \quad (4)$$

と表されるが、 $n = 0$  のとき  $x = y$  となるから、

$$m > n > 0$$

である。

(2)を変形して

$$\begin{aligned}x^2 &= (m+n)^2 - 2n^2 \\(m+n)^2 - x^2 &= 2n^2 \\(m+n+x)(m+n-x) &= 2n^2\end{aligned}\tag{5}$$

$n$  が奇数であるとすれば,  $m+n+x$  と  $m+n-x$  の積は  $2n^2$  であるから偶奇は異なるが,

$$(m+n+x) - (m+n-x) = 2x$$

より偶奇が等しいことと矛盾するから,

$n$  は偶数

である。  $\gcd(m, n) = 1$  より

$m$  は奇数

であり, (2), (3)より

$x, y$  はともに奇数である。

(5)において  $m+n+x, m+n-x$  はともに正の偶数であるから, (5)は

$$\frac{m+n+x}{2} \cdot \frac{m+n-x}{2} = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2\tag{6}$$

$\frac{m+n+x}{2}$  と  $\frac{m+n-x}{2}$  が共通の素因数  $p$  をもつとすれば,

$$p \mid m+n \text{ かつ } p^2 \mid 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \implies p \mid m+n \text{ かつ } p \mid n \implies p \mid m \text{ かつ } p \mid n$$

となって  $m$  と  $n$  が互いに素であることに反するから,

$$\frac{m+n+x}{2} \text{ と } \frac{m+n-x}{2} \text{ は互いに素な正の整数}$$

である。(6)より

$$\left(\frac{m+n+x}{2}, \frac{m+n-x}{2}, \frac{n}{2}\right) = (2a^2, b^2, ab) \text{ または } (b^2, 2a^2, ab)$$

を満たす互いに素な自然数  $a, b$  が存在して

$$m+n = 2a^2 + b^2\tag{7}$$

$$n = 2ab\tag{8}$$

$m$  は奇数,  $n$  は偶数であるから

$$m^2 - 2mn - n^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$y^2 \equiv 1 \pmod{4}$  であるから, (3)より

$$\begin{aligned}y^2 &= m^2 - 2mn - n^2 = (m-n)^2 - 2n^2 \\(m-n+y)(m-n-y) &= 2n^2\end{aligned}\tag{9}$$

ここで,  $m^2 - 2mn = m(m-2n) > n^2 > 0$ ,  $m > 0$  より

$$m-2n > 0, \text{ 特に } m-n > n > 0$$

であるから,  $m-n+y$  と  $m-n-y$  はともに正の偶数であり, (9)は

$$\frac{m-n+y}{2} \cdot \frac{m-n-y}{2} = 2\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

(6)と同様にして

$$\left(\frac{m-n+y}{2}, \frac{m-n-y}{2}, \frac{n}{2}\right) = (2c^2, d^2, cd) \text{ または } (d^2, 2c^2, cd)$$

を満たす互いに素な自然数  $c, d$  が存在して

$$m-n = 2c^2 + d^2 \quad (10)$$

$$n = 2cd \quad (11)$$

(8), (11)より  $ab = cd$ であることを考えて

$$\gcd(a, c) = s$$

とおくと,

$$a = st, \quad c = su \quad (12)$$

を満たす互いに素な自然数  $t, u$  が存在する。このとき

$$tb = ud, \quad \gcd(t, u) = 1$$

より

$$b = uv, \quad d = tv \quad (13)$$

となる自然数  $v$  が存在する。(7), (10), (11)より

$$2n = 2a^2 + b^2 - (2c^2 + d^2) = 4cd$$

(12), (13)より

$$2s^2t^2 + u^2v^2 - 2s^2u^2 - t^2v^2 = 4stuv$$

$$2(t^2 - u^2)s^2 - 4stuv - (t^2 - u^2)v^2 = 0$$

ここで  $t = u$  であるとすれば,  $stuv = 0$  となって自然数の積であることに反するから

$$t^2 - u^2 \neq 0$$

よって,  $\frac{s}{v}$  または  $\frac{v}{s}$  が整数係数 2 次方程式の有理数解となるから

$$\frac{1}{4}(\text{判別式}) = (2tu)^2 + 2(t^2 - u^2)^2 = 2(t^4 + u^4)$$

は有理数の平方かつ整数であり,

$$t^4 + u^4 = 2w^2 \quad (14)$$

を満たす自然数  $w$  が存在する。(14), (12), (13), (8), (4)より

$$w^2 < 2w^2 = t^4 + u^4 \leq a^4 + b^4 \leq \left(\frac{n}{2}\right)^4 + \left(\frac{n}{2}\right)^4 < n^4 < (m^2 + n^2)^2 = z^2$$

であるから

$$w < z$$

(14)が成り立つから,  $z$ の最小性より

$$t = u$$

となって矛盾する。 ■

定理 2 の証明

定理 1 より,  $x^4 + y^4 = 2(z^2)^2$  を満たせば  $x = y$  が成り立ち,  $x, y, z$  はすべて自然数であるから,  $x = y = z$  である。 ■

定理 3 の証明

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = z^2 \tag{15}$$

を満たす自然数  $x, y, z$  が存在すると仮定する。

$x = y$  とすると,  $8x^4 = z^4$  となって 8 が平方数でないことと矛盾するから,

$$x \neq y$$

であり, 対称性より

$$x > y$$

としてよい。(15)を変形すると

$$2x^4 + 12x^2y^2 + 2y^4 = 2z^2$$

$$(x + y)^4 + (x - y)^4 = 2z^2$$

であるから, 定理 1 より

$$x + y = x - y$$

が成り立つ。このとき  $y = 0$  となって,  $y$  が自然数であることに反する。 ■

注 1  $b \geq 0$  としなければいけないように思われるかもしれないが,  $b = 0$  のときは  $x = y$  となって, ここでの仮定に反する。 $a > b$  は  $y = a - b > 0$  からである。

注 2 互いに素な正の整数  $a, b, c$  が

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{16}$$

を満たすとき,

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2 \tag{17}$$

または

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2 \tag{18}$$

を満たす偶奇が異なる互いに素な正の整数  $m, n$  が存在する。

これはピタゴラス数の有名な性質であり, 文献 [1] などに証明は紹介されているが, ここでも一応証明を与えておくことにする。

$a$  と  $b$  は互いに素であるから, 少なくとも一方は奇数であるが, 対称性より

$b$  は奇数

であると仮定して, (17) を導けば十分である。

ここで,  $a, b$  がともに奇数であるとすれば,

$$a = 2\alpha + 1, \quad b = 2\beta + 1 \quad (\alpha, \beta \text{ は整数})$$

と表されて

$$a^2 + b^2 = 4(\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta) + 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

となるから, 平方数  $c^2$  と等しくならない。よって,

$$a \text{ は偶数, } b \text{ と } c \text{ は奇数}$$

である。

(16) を変形すると

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

$$\therefore \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c+b}{2} \cdot \frac{c-b}{2} \tag{19}$$

$b, c$  は奇数であるから

$$\frac{c+b}{2}, \frac{c-b}{2} \text{ はともに整数}$$

であり,  $b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{8}$  より

$$a^2 = c^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

であるから,  $\frac{a}{2}$  は偶数である。

$$b = \frac{c+b}{2} - \frac{c-b}{2}, \quad c = \frac{c+b}{2} + \frac{c-b}{2}$$

は互いに素である (共通の素因数をもたない) から,

$$\frac{c+b}{2} \text{ と } \frac{c-b}{2} \text{ は互いに素}$$

であり, (19) より

$$\frac{a}{2} = mn, \quad \frac{c+b}{2} = m^2, \quad \frac{c-b}{2} = n^2$$

となる互いに素な正の整数  $m, n$  が存在する。

$$\frac{a}{2} = mn \text{ は偶数}$$

であるから,  $m$  と  $n$  の一方は偶数で, 他方は奇数である。 ■

## 参考文献

- [ 1 ] 足立恒雄, フェルマーの大定理, 筑摩書房 (2006).
- [ 2 ] L.E.Dickson, *History of the theory of numbers*, Chelsea (1966)
- [ 3 ] 大塚美紀生, ディオファントス方程式  $2^n x^2 + y^4 = z^4$  について, 早稲田数学フォーラム (2008)  
<http://wasmath.la.coocan.jp/fermat-sierpinski.pdf>
- [ 4 ] 大塚美紀生, ディオファントス方程式  $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = z^2$  の整数解とその応用, 早稲田数学フォーラム (2014, 2017)  
<http://wasmath.la.coocan.jp/x4+6x2y2+y4=z2.pdf>
- [ 5 ] 大塚美紀生, 等差数列をなす平方数について, 早稲田数学フォーラム (2019)  
<http://wasmath.la.coocan.jp/arithmic-square.pdf>