

不定方程式 $x^6 - 6x^3 + 11 = y^3$ の解法

大塚美紀生

受験数学，高校数学と聞けば，どこか本物ではないと距離を置かれがちであるが，その解法テクニックが学問的に有意義なこともある。そのような例をかつて [1] で取り上げたが，本稿では，2001 年一橋大学後期に出題された

$m^3 + 3m^2 + 2m + 6$ が立方数となるような正の整数 m を求める解法と結びつけて，不定方程式 $x^6 - 6x^3 + 11 = y^3$ が解けることを紹介する。

定理 不定方程式

$$x^6 - 6x^3 + 11 = y^3 \quad (1)$$

を満たす正の整数は

$$x = 2, \quad y = 3$$

のみである。^{注1}

定理の証明

$x^6 - 6x^3 + 11 = (x^3 - 3)^2 + 2$ と書けることに注目して

$$x^3 - 3 = n \quad (2)$$

とおくと，(1)より

$$y^3 = n^2 + 2 \quad (3)$$

である。ところで， $x = 1$ のとき

$$1^6 - 6 \times 1^3 + 11 = 6 \neq y^3$$

となって (1) を満たさないから，

$$x \geq 2, \quad n \geq 5$$

である。(1), (2) より

$$\begin{aligned} x^3 y^3 &= (n+3)(n^2+2) \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n + 6 \end{aligned} \quad (4)$$

$n \geq 5 > 0$ より

$$n^3 < n^3 + 3n^2 + 2n + 6 < n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = (n+2)^3$$

であるから，(4)より

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 + 2n + 6 &= (n+1)^3 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore n = 5 \quad (n \geq 5 \text{ を満たす})$$

(2), (3) より

$$x^3 = 8, \quad y^3 = 27$$

x, y は整数であるから^{注2}

$$x = 2, \quad y = 3$$

■

注 1 定数項が 11 以外の場合にも同じ手法が適用できるが，2001 年一橋大学後期の出題と同じ係数になる場合だけを取り上げている。今回の執筆の狙いはあくまでも方法論の紹介にあり，方程式 $x^6 - 6x^3 + c = y^3$ (c は整数定数) 全体の解決を目指すものではない。

注 2 詳細に述べるならば，

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

であるが， x は整数 (特に実数) であるから

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$$

であり，

$$x = 2$$

に定まるということである。 y についても同様である。

参考文献

[1] 大塚美紀生，方程式 $x^2y^2 - 4(x + y) = z^2$ の自然数解，

早稲田数学フォーラム (2012)，

<http://wasmath.la.coocan.jp/2011nagoya.pdf>