

〔 I 〕

$$(1) \quad \overrightarrow{BC} = (-1, 4, 2) - (1, 1, 1) = (-2, 3, 1)$$

求めるベクトルを  $\vec{v} = (x, y, z)$  とすると,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{v} = 3x - 2y - z = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} = -2x + 3y + z = 0 \quad \dots\dots ②$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3\sqrt{3} \quad \dots\dots ③$$

① + ② より

$$x + y = 0$$

① × 2 + ② × 3 より

$$5y + z = 0 \quad \therefore x = \frac{y}{-1} = \frac{z}{5}$$

$\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2} = 3\sqrt{3}$  であるから, ③より

$$\vec{v} = \boxed{\pm(1, -1, 5)} \quad (\mathcal{A})$$

(2)(i)  $a, b$  の定め方より

$$|a^2 - b^2| = (a + b)|a - b| = 225$$

$0 < 2b < a$  より特に

$$0 < a - b < a + b$$

であるから,

$$(a - b, a + b) = (1, 225), (3, 75), (5, 45), (9, 25)$$

$$\therefore (a, b) = (113, 112), (39, 36), (25, 20), (17, 8)$$

$2b < a$  を満たすのは,

$$a = \boxed{17}, \quad b = \boxed{8}$$

(イ)                      (ウ)

(ii) 二項定理と問題の仮定より

$$(17x + 8)^{20} = \sum_{k=0}^{20} {}_{20}C_k (17x)^k 8^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} c_k x^k$$

であるから,

$$c_k = \frac{20!}{k!(20-k)!} \cdot 17^k \cdot 8^{20-k}$$

$2c_k = c_{k-1}$  であるとき

$$2 \cdot \frac{20!}{k!(20-k)!} \cdot 17^k \cdot 8^{20-k} = \frac{20!}{(k-1)!(21-k)!} \cdot 17^{k-1} \cdot 8^{21-k}$$

$$\frac{2}{k} \times 17 = \frac{1}{21-k} \times 8$$

$$4k = 17(21-k)$$

$$\therefore k = \boxed{17} \quad (\mathcal{E})$$

(3)(i) 等差数列  $\{a_n\}$  の公差  $d$  は

$$d = \frac{a_8 - a_4}{8 - 4} = \frac{218 - 102}{4} = \boxed{29} \text{ (カ)}$$

$$a_1 = a_4 - 3d = 102 - 29 \times 3 = \boxed{15} \text{ (オ)}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \sum_{n=5}^{15} a_n &= \frac{11}{2}(a_1 + 4d + a_1 + 14d) \\ &= \frac{11}{2} \times (2 \times 15 + 18 \times 29) \\ &= \boxed{3036} \text{ (キ)} \end{aligned}$$

(4)(i)  $\log_3 x = t$  とおくと,  
 $3^{-1} \leq x \leq 3^3$ 

より

$$\boxed{-1 \leq t \leq 3} \text{ (ク)}$$

$$\text{(ii)} \quad y = -t^3 + 6t^2 - 9t + 3 = -t(t-3)^2 + 3$$

を  $t$  の関数とみて微分すると

$$\frac{dy}{dt} = -3t^2 + 12t - 9 = -3(t^2 - 4t + 3) = -3(t-1)(t-3)$$

|                 |    |    |   |
|-----------------|----|----|---|
| $t$             | -1 | 1  | 3 |
| $\frac{dy}{dt}$ |    | -  | + |
| $y$             |    | 極小 |   |

$$t = -1 \text{ のとき } y = 1 \times (-4)^2 + 3 = 19$$

$$t = 1 \text{ のとき } y = -(-2)^2 + 3 = -1$$

$$t = 3 \text{ のとき } y = -3 \times 0^2 + 3 = 3$$

以上より,

$$y \text{ の最大値は } \boxed{19} \text{ (ケ)}, \text{ 最小値は } \boxed{-1} \text{ (コ)}$$

$$(5) \quad f(x) = -x^2 + ax + 2a - 3 = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(a^2 + 8a - 12)$$

とおき,  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸が  $0 \leq x \leq 2$  において共有点を持つ条件を考える。

①  $f(0)f(2) \leq 0$  のとき

$y = f(x)$  のグラフが  $(0, 0)$  または  $(2, 0)$  を通るか, または 2 点  $(0, f(0)), (2, f(2))$  が  $x$  軸に関して反対側にあることを表すから, 条件はそのまま

$$f(0)f(2) = (2a - 3)(4a - 7) \leq 0$$

であり,

$$\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{7}{4}$$

②  $f(0)f(2) > 0$  のとき

$$\begin{cases} (\text{頂点の } y \text{ 座標}) = \frac{1}{4}(a^2 + 8a - 12) \geq 0 \\ f(0) = 2a - 3 < 0 \\ f(2) = 4a - 7 < 0 \\ 0 \leq \frac{a}{2} \leq 2 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2} - (-4 + 2\sqrt{7}) = \frac{11 - 4\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{121} - \sqrt{112}}{2} > 0 \text{ にも注意して}$$

$$-4 + 2\sqrt{7} \leq a < \frac{3}{2}$$

①または②より

$$\boxed{-4 + 2\sqrt{7} \leq a \leq \frac{7}{4}} \text{ (サ)}$$

(6)(i)  $BC = 3$ ,  $BE : EC = 2 : 1$  より

$$BE = 2$$

$\triangle ABE$  において余弦定理より

$$AE^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 7$$

$\triangle BDE$  においても同様に考えて,

$$DE = AE = \sqrt{7}$$

$AD$  の中点を  $M$  とおくと, 二等辺三角形の性質より

$$\angle AME = 90^\circ$$

となるから, 直角三角形  $AME$  において三平方の定理より

$$EM = \sqrt{AE^2 - AM^2} = \sqrt{7 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

$\triangle AED$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot EM = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{19}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{19}}{4}}$$

(シ)

(ii)  $\triangle AED$  の内接円の半径を  $r$  とおき、面積  $S$  を 2 通りに表すと

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot r = \frac{3\sqrt{19}}{4}$$

$$\therefore r = \frac{3\sqrt{19}}{2(2\sqrt{7} + 3)} = \frac{3\sqrt{19}(2\sqrt{7} - 3)}{2(28 - 9)} = \boxed{\frac{6\sqrt{133} - 9\sqrt{19}}{38}}$$

(ス)

(注) (i) は、ベクトルを用いて解いてもよい。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DA} &= \vec{a}, \quad \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{DC} = \vec{c} \text{ とおくと,} \\ |\vec{a}| &= |\vec{b}| = |\vec{c}| = 3, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 3^2 \times \cos 60^\circ = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

点 E は BC を 2 : 1 に内分するから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \\ |\overrightarrow{DE}|^2 &= \frac{1}{3^2} (|\vec{b}|^2 + 4\vec{b} \cdot \vec{c} + 4|\vec{c}|^2) = \frac{1}{9} (3^2 + 4 \times \frac{9}{2} + 4 \times 3^2) = 7 \\ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} &= \frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{a} \cdot \vec{c} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$\triangle AED$  の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{DA}|^2 |\overrightarrow{DE}|^2 - (\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3^2 \times 7 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{28 - 9} = \boxed{\frac{3\sqrt{19}}{4}} \end{aligned}$$

(シ)

(7) 与えられた式は

$$f(x) = 4x + \int_0^1 tf(t) dt + x \int_0^1 f(t) dt$$

ここで,

$$a = \int_0^1 f(t) dt \quad \dots\dots ①$$

$$b = \int_0^1 tf(t) dt \quad \dots\dots ②$$

とおくと,

$$f(x) = (a+4)x + b \quad \dots\dots ③$$

①, ③より

$$a = \frac{1}{2}(a+4) + b \quad \therefore a = 2b + 4 \quad \dots\dots ④$$

②, ③より

$$b = \int_0^1 \{(a+4)t^2 + bt\} dt = \frac{1}{3}(a+4) + \frac{1}{2}b$$

$$\frac{1}{2}b = \frac{1}{3}(a+4) \quad \therefore a = \frac{3}{2}b - 4 \quad \dots\dots ⑤$$

④かつ⑤より  $a$  を消去して

$$2b + 4 = \frac{3}{2}b - 4$$

$$\frac{1}{2}b = -8 \quad \therefore b = \boxed{-16} \quad (\text{セ})$$

④に代入すると

$$a = -28$$

(8)  $\theta = 18^\circ$  とおくと,  $5\theta = 90^\circ$  であるから,

$$3\theta = 90^\circ - 2\theta$$

三角関数の公式を用いて,

$$\sin 3\theta = \sin(90^\circ - 2\theta) = \cos 2\theta$$

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$$

$$(\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$$

 $0 < \sin\theta < 1$  より

$$\sin\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

正方形 ABCD の面積  $S$  は

$$S = \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4^2} = \boxed{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \quad (\text{ソ})$$

## 〔Ⅱ〕

- (1) 感染している人が「感染していない」と判定される確率は  $\frac{1}{1000}$  であるから、その余事象である「感染している」と判定される確率は

$$1 - \frac{1}{1000} = \boxed{\frac{999}{1000}} \quad (\text{タ})$$

- (2) 「感染している」と判定されるのは、感染している人が正しく判定されるか、感染していない人が誤って判定される場合のことであるから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{5}{1000} \times \frac{999}{1000} + \frac{995}{1000} \times \frac{3}{1000} &= \frac{999 + 199 \times 3}{200 \times 1000} \\ &= \frac{1596}{200000} \\ &= \boxed{\frac{399}{50000}} \quad (\text{チ}) \end{aligned}$$

- (3) 「感染している」と判定された人が、実際には感染していない条件付き確率は

$$\begin{aligned} \frac{\frac{995}{1000} \times \frac{3}{1000}}{\frac{5}{1000} \times \frac{999}{1000} + \frac{995}{1000} \times \frac{3}{1000}} &= \frac{597}{999 + 597} \\ &= \frac{597}{1596} \\ &= \boxed{\frac{199}{532}} \quad (\text{ツ}) \end{aligned}$$

## 〔 III 〕

(1)

$$f(x) = ax^2 - bx = a\left(x^2 - \frac{b}{a}x\right) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

$$g(x) = -\frac{1}{a}x^2 + \frac{1}{b}x = -\frac{1}{a}\left(x^2 - \frac{a}{b}x\right) = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{a}{4b^2}$$

$a > 0, b > 0$  を考えると,  $f(x)$  と  $g(x)$  の極値の差は

$$\left| \frac{a}{4b^2} - \left(-\frac{b^2}{4a}\right) \right| = \frac{a}{4b^2} + \frac{b^2}{4a} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2b^2} + \frac{b^2}{2a} \right)$$

であり, 相加・相乗平均の不等式より

$$\frac{1}{2} \left( \frac{a}{2b^2} + \frac{b^2}{2a} \right) \geq \sqrt{\frac{a}{2b^2} \cdot \frac{b^2}{2a}} = \frac{1}{2}$$

ここで, 不等式の等号は

$$\frac{a}{2b^2} = \frac{b^2}{2a} \quad \text{すなわち} \quad a = \boxed{b^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ト)

のとき成り立つから,

$$\text{最小値は} \quad \boxed{\frac{1}{2}} \quad \text{(テ)}$$

(2)  $f(x)$  の  $-1$  から  $1$  までの平均変化率

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{a - b - (a + b)}{2} = -b$$

が  $g(x)$  の  $x = 5$  における微分係数

$$g'(5) = -\frac{2}{a} \times 5 + \frac{1}{b}$$

と等しくなるから,

$$-b = -\frac{10}{a} + \frac{1}{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より  $a$  を消去して

$$-b = -\frac{10}{b^2} + \frac{1}{b}$$

$$b^3 + b - 10 = 0$$

$$(b - 2)(b^2 + 2b + 5) = 0$$

$b > 0$  より

$$b = \boxed{2} \quad \text{(チ)}$$

①に代入して

$$a = 4$$

(3) (2)より

$$f(t) = 4t^2 - 2t$$

$$g(4t) = -\frac{1}{4}(4t)^2 + \frac{1}{2} \cdot 4t = -4t^2 + 2t$$

 $0 < t < \frac{1}{2}$  では

$$f(t) = 4t\left(t - \frac{1}{2}\right) < 0, \quad g(4t) = -4t\left(t - \frac{1}{2}\right) > 0$$

であることを考えて,  $\triangle OPQ$  の面積  $S(t)$  は

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} |tg(4t) - 4tf(t)| \\ &= \frac{5}{2} t(-4t^2 + 2t) \\ &= \boxed{-10t^3 + 5t^2} \quad (\text{ニ}) \end{aligned}$$

$$S'(t) = -30t^2 + 10t = -30t\left(t - \frac{1}{3}\right)$$

|         |     |               |                            |
|---------|-----|---------------|----------------------------|
| $t$     | (0) | $\frac{1}{3}$ | $\left(\frac{1}{2}\right)$ |
| $S'(t)$ | +   | 0             | -                          |
| $S(t)$  |     | ↗ 極大          | ↘                          |

よって,  $S(t)$  は

$$t = \boxed{\frac{1}{3}} \quad (\text{ヌ})$$

のとき最大値

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(-2 \times \frac{1}{3} + 1\right) = \boxed{\frac{5}{27}} \quad (\text{ネ})$$

をとる。