

〔 I 〕

(1) 真数条件より

$$y + 5 > 0 \text{ かつ } x + 2 > 0$$

底の変換公式より

$$\log_{\frac{1}{2}}(y + 5) = \frac{\log_2(y + 5)}{\log_2 2^{-1}} = \frac{\log_2(y + 5)}{-\log_2 2} = -\log_2(y + 5)$$

となるから, 与えられた方程式は

$$\log_2 y - \log_2(y + 5) = \log_2 4 - \log_2(x + 2)$$

$$\log_2 7(x + 2) = \log_2 4(y + 5)$$

$$\therefore 7(x + 2) = 4(y + 5) > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $y = 3$ のとき, ①より

$$7(x + 2) = 32 \quad \therefore x = \frac{\boxed{18}}{\boxed{7}} \quad \begin{matrix} (1)(2) \\ (3) \end{matrix}$$

(ii) 7と4は互いに素であるから, x と y が整数のとき, ①より

$$x + 2 = 4n, \quad y + 5 = 7n$$

を満たす正の整数 n が存在し,

$$x = 4n - 2, \quad y = 7n - 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore y - x = 3n - 3$$

$$2^9 = 512, \quad 2^{10} = 1024, \quad 2^{12} = 4096, \quad 2^{13} = 8192 \text{ より}$$

$$2^9 < 1000 < 2^{10}, \quad 2^{12} < 2000 < 2^{13}$$

であるから, 不等式 $1000 < 2^{y-x} < 2000$ を満たすとき

$$10 \leq 3n - 3 \leq 12 \quad \therefore \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3} \leq n \leq 5$$

 n は(正の)整数であるから

$$n = 5$$

②に代入して

$$x = \frac{\boxed{18}}{(4)(5)}, \quad y = \frac{\boxed{30}}{(6)(7)}$$

(2)(i) 円 O は円 P に内接するから

$$\text{円 } P \text{ の半径は } \sqrt{2}a + 3$$

円 C は円 P に外接するから

$$\sqrt{(a - 5\sqrt{2})^2 + a^2} = 2 + (\sqrt{2}a + 3)$$

$$(a - 5\sqrt{2})^2 + a^2 = (\sqrt{2}a + 5)^2$$

$$-10\sqrt{2}a + 50 = 10\sqrt{2}a + 25$$

$$\therefore a = \frac{25}{20\sqrt{2}} = \frac{\boxed{5}^{(8)} \sqrt{\boxed{2}^{(9)}}}{\boxed{8}^{(10)}}$$

(ii) 2円 O , P の中心を通る直線 (x 軸) と共通接線 l との交点は, 2円の半径の比を
考えることにより

$$(15\sqrt{2}, 0)$$

であるから, 接線 l の方程式は

$$y = m(x - 15\sqrt{2}) \quad (m > 0) \quad \dots\dots (*)$$

l と C が接する条件を考え,

$$\frac{|m(0 - 15\sqrt{2}) - 0|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$$

$$5\sqrt{2} |m| = \sqrt{m^2 + 1}$$

$$50m^2 = m^2 + 1 \quad \therefore m^2 = \frac{1}{49}$$

$m > 0$ より

$$m = \frac{1}{7}$$

(*) に代入して, 接線 l の方程式は

$$y = \frac{\boxed{1}^{(11)}}{\boxed{7}^{(12)}} x - \frac{\boxed{15}^{(13)} \sqrt{\boxed{2}^{(14)}}}{\boxed{7}^{(16)}}$$

円 P の中心 (a, a) との距離 d は

$$d = \frac{|a - 7a - 15\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \left| \frac{6}{5\sqrt{2}} a + 3 \right| = \frac{6}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{8} + 3 = \frac{15}{4}$$

円 P の半径は

$$\sqrt{2} a + 3 = \sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{8} + 3 = \frac{17}{4}$$

接線 l が円 P によって切り取られる線分の長さは

$$2\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^2 - \left(\frac{15}{4}\right)^2} = \boxed{4}^{(17)}$$

(3)(i) 3と5の最小公倍数が15であることに注意すると, $\{a_n\}$ は
15で割った余りが1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14
である自然数から成る数列であるから,

$$a_5 = \boxed{8}_{(18)}, \quad a_{10} = a_{8 \times 1 + 2} = 15 \times 1 + 2 = \boxed{17}_{(19)(20)},$$

$$a_{k+8} = a_k + \boxed{15}_{(21)(22)}$$

(ii) a_1 から a_{8k} までの和は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{8k} a_n &= (1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 11 + 13 + 14)k + \sum_{n=1}^k 15(n-1) \times 8 \\ &= 60k + 120 \times \frac{1}{2}k(k-1) \\ &= 60k^2 \end{aligned}$$

$60 \times 5^2 = 1500$, $60 \times 6^2 = 2160$ を参考にして,

$$\sum_{n=1}^{8 \times 5 + 6} a_n = 1500 + (15 \times 5) \times 6 + 1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 11 = 1983$$

$$\sum_{n=1}^{8 \times 5 + 7} a_n = 1983 + 15 \times 5 + 13 = 2071$$

であるから, $\sum_{n=1}^m a_n > 2000$ を満たす最小の m は

$$m = 8 \times 5 + 7 = \boxed{47}_{(23)(24)}$$

(4)(i) 解と係数の関係より

$$\begin{aligned} -k + (-k + 4) &= -a, \quad -k(-k + 4) = b \\ \therefore a &= \boxed{2}_{(25)}k - \boxed{4}_{(26)}, \quad b = k^2 - \boxed{4}_{(27)}k \end{aligned}$$

(ii) x の2次方程式 $x^2 + bx + a = 0$ の判別式を D とすると

$$D = b^2 - 4a = (k^2 - 4k)^2 - 4(2k - 4)$$

少なくとも1つの正の実数解をもつ条件は

$$D \geq 0 \text{ かつ } \frac{-k(k-4) + \sqrt{D}}{2} > 0$$

$D \geq 0$, $k \geq 1$ のもとで

$$\sqrt{D} = \sqrt{k^2(k-4)^2 - 8(k-4)} > k(k-4)$$

となるのは,

$$k-4 \leq 0 \text{ または } "k-4 \geq 0 \text{ かつ } -8(k-2) > 0"$$

のときであり,

$$1 \leq k \leq 4$$

k は自然数であるから

$$k = 1, 2, 3, 4$$

に限られる。 $a + b = k^2 - 2k - 4$ の値を求めると,

$$k = 1 \text{ のとき } D = 17 > 0, \quad a + b = -5, \quad b = -3$$

$$k = 2 \text{ のとき } D = 16 > 0, \quad a + b = -4$$

$$k = 3 \text{ のとき } D = 1 > 0, \quad a + b = -1, \quad b = -3$$

$$k = 4 \text{ のとき } D = -16 < 0$$

であるから,

$$a + b \text{ が最大のとき } b = \boxed{-3},$$

(28)(29)

$$a + b \text{ が最小のとき } b = \boxed{-3}$$

(30)(31)

(別法) x の 2 次方程式 $x^2 + bx + a = 0$ が実数 α, β を 2 解とするとき,

$$\alpha + \beta = -b, \quad \alpha\beta = a$$

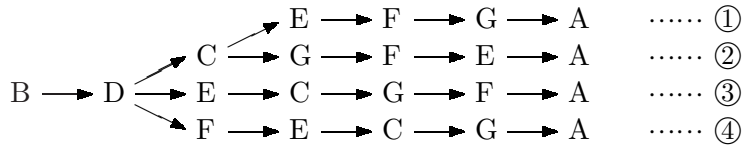
であり, a と b がともに正であるとすれば α と β はともに負となって仮定に反するから,

$$a = 2(k - 2) \leq 0 \quad \text{または} \quad b = k(k - 4) \leq 0$$

が必要であるとしてもよい。

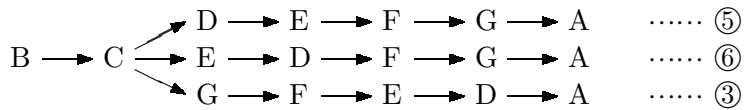
〔 II 〕

(1) AO, OB, BD を 3 辺とする八角形の辺のつなぎ方は

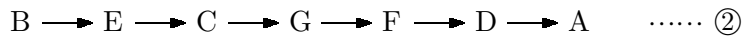


となるから, 八角形は全部で $\boxed{4}$ 個できる。
(32)

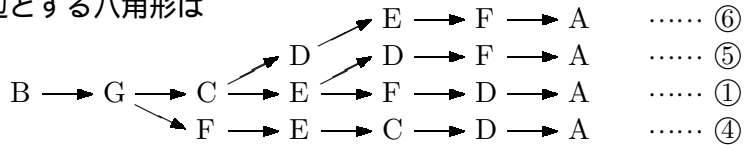
(2) BC を 1 辺とする八角形は



BE を 1 辺とする八角形は



BG を 1 辺とする八角形は



直線 $y = x$ に関して対称のものを同一視すると, 八角形は全部で

$\boxed{6}$ 種類
(33)

(3) 6 種類の八角形それぞれの周の長さは

- ① $2 + \sqrt{5} + \sqrt{10} + 4 + 4 + 4 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + \sqrt{10} + 14$
- ② $2 + \sqrt{5} + \sqrt{10} + 4 + 4 + 4 + \sqrt{13} = \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13} + 14$
- ③ $2 + \sqrt{5} + \sqrt{2} + 4 + 4 + 4 + \sqrt{5} = \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 14$
- ④ $2 + \sqrt{5} + \sqrt{10} + 4 + 4 + 4 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + \sqrt{10} + 14$
- ⑤ $2 + \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{2} + 4 + 4 + \sqrt{5} = \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{10} + 10$
- ⑥ $2 + \sqrt{5} + 4 + \sqrt{2} + \sqrt{10} + 4 + \sqrt{5} = \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{10} + 10$

であり,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13} + 14 &> 2\sqrt{5} + \sqrt{10} + 14 \\
 &> \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 14 \\
 &> \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{10} + 10
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\text{最小値は } \sqrt{\boxed{2}} + \boxed{2} \sqrt{\boxed{5}} + \sqrt{\boxed{10}} + \boxed{10}$$

(34) (35) (36) (37)(38) (39)(40)

$$\text{最大値は } \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13} + 14$$

〔Ⅲ〕

(1) Sは△OBCの重心であるから

$$\vec{CS} = \frac{\overset{(41)}{\boxed{1}}}{\underset{(42)}{\boxed{3}}} \vec{CB} + \frac{\overset{(43)}{\boxed{1}}}{\underset{(44)}{\boxed{3}}} \vec{CO}$$

(2) PはOAの中点であるから

$$P(5, 0, 0)$$

点Qのy座標を q ($0 \leq q \leq 10$) とおくと, △APQの面積について

$$\frac{1}{2} \times 5 \times q = \frac{75}{4} \quad \therefore q = \frac{15}{2}$$

求める内分の比は

$$AQ : QB = q : (10 - q) = \frac{15}{2} : \frac{5}{2} = \underset{(45)}{\boxed{3}} : \underset{(46)}{\boxed{1}}$$

(3) 点Rは線分AS上にあるから

$$\vec{AR} = k \vec{AS} \quad (0 \leq k \leq 1) \quad \dots\dots ①$$

と表され,

$$\begin{aligned} \vec{CR} &= \vec{CA} + \vec{AR} \\ &= \vec{CA} + k(\vec{CS} - \vec{CA}) \\ &= \vec{CA} + k\left(\frac{1}{3}\vec{CB} + \frac{1}{3}\vec{CO} - \vec{CA}\right) \\ &= \frac{k}{3}\vec{CO} + (1-k)\vec{CA} + \frac{k}{3}\vec{CB} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

Rは平面CPQ上の点でもあるから

$$\begin{aligned} \vec{CR} &= s\vec{CP} + t\vec{CQ} \\ &= s\left(\frac{1}{2}\vec{CO} + \frac{1}{2}\vec{CA}\right) + t\left(\frac{1}{4}\vec{CA} + \frac{3}{4}\vec{CB}\right) \\ &= \frac{s}{2}\vec{CO} + \left(\frac{s}{2} + \frac{t}{4}\right)\vec{CA} + \frac{3}{4}t\vec{CB} \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

と表される。

 $\vec{CO}, \vec{CA}, \vec{CB}$ は1次独立であるから, ②かつ③より

$$\begin{cases} \frac{1}{3}k = \frac{1}{2}s & \dots\dots ④ \\ 1 - k = \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}t & \dots\dots ⑤ \\ \frac{1}{3}k = \frac{3}{4}t & \dots\dots ⑥ \end{cases}$$

④, ⑥を⑤に代入して

$$1 - k = \frac{1}{3}k + \frac{1}{9}k \quad \therefore k = \frac{9}{13}$$

①に代入して

$$\overrightarrow{AR} = \frac{\overset{(47)}{\boxed{9}}}{\underset{(48)(49)}{\boxed{13}}} \overrightarrow{AS}$$

〔IV〕 $x \leq a$ において

$$f(x) = x(a-x) - x = -x(x-a+1) = -\left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2 + \frac{(a-1)^2}{4}$$

 $x \geq a$ において

$$f(x) = x(x-a) - x = x(x-a-1) = \left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 - \frac{(a+1)^2}{4}$$

(1)(2) $0 \leq a \leq 1$ のとき

$$a-1 \leq 0, \quad a \leq \frac{a+1}{2} < a+1$$

であるから, $0 \leq x \leq a+1$ における $f(x)$ の最小値は

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right) = -\frac{(a+1)^2}{4} = \frac{\boxed{-1}}{\boxed{4}} a^2 - \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} a - \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$$

(57)(58) (60) (62)
(59) (61) (63)

 $a = \frac{1}{2}$ のとき, $0 \leq a \leq \frac{3}{2}$ における $f(x)$ の最小値は

$$-\frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}{4} = \frac{\boxed{-9}}{\boxed{16}}$$

(50)(51) (52)(53)

 $a = \frac{3}{2}$ のとき

$$f(x) = \begin{cases} -x\left(x - \frac{1}{2}\right) & \left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right) \\ \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{16} & \left(\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

の $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$ における最小値は

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$$

(54)(55) (56)

(3) $0 \leq a \leq 1$ のとき

$$a-1 \leq 0 \leq a \leq 1 \leq a+1$$

であるから,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^1 \{-f(x)\} dx \\ &= \int_0^a \{x^2 - (a-1)x\} dx + \int_a^1 \{-x^2 + (a+1)x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a-1}{2}x^2\right]_0^a + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+1}{2}x^2\right]_a^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}a^3 - \frac{a-1}{2}a^2 - \frac{1}{3} + \frac{a+1}{2} - \left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{a+1}{2}a^2\right) \\
&= \frac{\overset{(64)(65)}{\boxed{-1}}}{\underset{(66)}{\boxed{3}}}a^3 + \frac{\overset{(67)}{\boxed{1}}}{\underset{(68)}{\boxed{2}}}a + \frac{\overset{(69)}{\boxed{1}}}{\underset{(70)}{\boxed{6}}}
\end{aligned}$$

(4) $0 < a < 1$ において

$$S'(a) = -a^2 + \frac{1}{2} = -\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

 $1 \leq a \leq 2$ のとき

$$0 \leq a-1 \leq 1 \leq a$$

であるから,

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_0^{a-1} \{-x^2 + (a-1)x\} dx + \int_{a-1}^1 \{x^2 - (a-1)x\} dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a-1}{2}x^2\right]_0^{a-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a-1}{2}x^2\right]_{a-1}^1 \\
&= \frac{1}{6}(a-1)^3 \times 2 + \frac{1}{3} - \frac{a-1}{2} \\
&= \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{2}a + \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

 $1 < a < 2$ において

$$S'(a) = (a-1)^2 - \frac{1}{2} = \left(a-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

a	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$	2	
$S'(a)$	+	0	-	-	0	+
$S(a)$		↗ 極大	↘	↘ 極小	↗	

$$\begin{aligned}
S\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{6} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \\
&= \frac{2 - \sqrt{2}}{6} < \frac{1}{6} = S(0)
\end{aligned}$$

 $0 \leq a \leq 2$ のとき, $S(a)$ は

$$a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\overset{(71)}{\boxed{2}} + \sqrt{\overset{(72)}{\boxed{2}}}}{\underset{(73)}{\boxed{2}}}$$

で最小となる。