

〔 I 〕

(1) $-1 < a < \frac{1}{3}$ より

$$\sqrt{a^2 + 2a + 1} = |a + 1| = a + 1$$

$$\sqrt{9a^2 - 6a + 1} = |3a - 1| = -(3a - 1)$$

であることを考え、

$$\begin{aligned} & \frac{3 + i}{\sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{9a^2 - 6a + 1} i} \\ &= \frac{3 + i}{a + 1 - (3a - 1)i} \\ &= \frac{(3 + i)\{a + 1 + (3a - 1)i\}}{(a + 1)^2 + (3a - 1)^2} \\ &= \frac{3(a + 1) - (3a - 1) + \{a + 1 + 3(3a - 1)\}i}{(a + 1)^2 + (3a - 1)^2} \end{aligned}$$

が実数であるとき、

$$a + 1 + 3(3a - 1) = 10a - 2 = 0 \quad \therefore a = \boxed{\frac{1}{5}} \quad (\text{ア})$$

(2) $(\sqrt[3]{3})^6 < (\sqrt[6]{a})^6$ より

$$a > 3^2 = 9$$

$$\sqrt[6]{(a^3)^4 \times a^2 \div a^5} = (a^{3 \times 4 + 2 - 5})^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{2}} < 24\sqrt{3} \text{ より}$$

$$a < (24\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

$$\therefore 9 < a < 12$$

 a は自然数であるから

$$a = \boxed{10, 11} \quad (\text{イ})$$

(3) $\{a_n\}$ は初項 2, 公差 1 の等差数列であるから

$$a_n = n + 1$$

 $n \geq 2$ のとき

$$b_2 - b_1 = 2$$

$$b_3 - b_2 = 3$$

 \vdots

$$+) \quad b_n - b_{n-1} = n$$

$$b_n - b_1 = \frac{n-1}{2}(2+n)$$

最終行の式は $n = 1$ のときも成り立ち, $b_1 = 1$ より

$$b_n = \frac{1}{2}(n-1)(n+2) + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \boxed{\frac{2n}{n+1}} \quad (\text{ウ})$$

$$(4) \quad 15x + 14y + 24z = 266 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(i) \quad k = 5x + 8z \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

としたとき, ①は

$$3k + 14y = 266 \quad \therefore y = \boxed{19 - \frac{3}{14}k} \quad (\text{エ})$$

x, y, z は自然数であり, ②より $k \geq 13$ であるから

$$(k, y) = (14, 16), (28, 13), (42, 10), (56, 7), (70, 4), (84, 1) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(ii) ②の両辺から $k = 5 \cdot (-3k) + 8 \cdot 2k$ を引いて

$$0 = 5(x + 3k) + 8(z - 2k)$$

$$\therefore 5(x + 3k) = 8(2k - z)$$

5と8は互いに素であるから,

$$x + 3k = 8n, \quad 2k - z = 5n$$

を満たす整数 n が存在して

$$(x, z) = (8n - 3k, 2k - 5n) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

x, z は自然数であるから

$$8n - 3k > 0 \quad \text{かつ} \quad 2k - 5n > 0$$

$$\therefore \frac{3}{8}k < n < \frac{2}{5}k$$

③のもと, k について場合分けして

$$k = 14 \text{ のとき} \quad \frac{21}{4} = 5 + \frac{1}{4} < n < \frac{28}{5} = 5 + \frac{3}{5}$$

$$k = 28 \text{ のとき} \quad \frac{21}{2} = 10 + \frac{1}{2} < n < \frac{56}{5} = 11 + \frac{1}{5} \quad \therefore n = 11$$

$$k = 42 \text{ のとき} \quad \frac{63}{4} = 15 + \frac{3}{4} < n < \frac{84}{5} = 16 + \frac{4}{5} \quad \therefore n = 16$$

$$k = 56 \text{ のとき} \quad 21 < n < \frac{112}{5} = 22 + \frac{2}{5} \quad \therefore n = 22$$

$$k = 70 \text{ のとき} \quad \frac{105}{4} = 26 + \frac{1}{4} < n < 28 \quad \therefore n = 27$$

$$k = 84 \text{ のとき} \quad \frac{63}{2} = 31 + \frac{1}{2} < n < \frac{168}{5} = 33 + \frac{3}{5} \quad \therefore n = 32, 33$$

③, ④より

$$(x, y, z) = \boxed{(4, 13, 1), (2, 10, 4), (8, 7, 2), (6, 4, 5), (4, 1, 8), (12, 1, 3)}$$

(オ)

(5)

(i) 連立方程式 $\begin{cases} y = -3x + 10 \\ y = 7x \end{cases}$ を解くことにより, 交点 A は

$$A(1, 7)$$

点 B は直線 l_1 上にあるから

$$B(b, -3b + 10) \quad (b \text{ は実数})$$

と表され, $\angle AOB = 45^\circ$ より

$$\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \cos 45^\circ$$

ここで,

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \cdot b + 7(-3b + 10) = -20b + 70$$

$$|\vec{OA}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{OB}|^2 = b^2 + (-3b + 10)^2 = 10b^2 - 60b + 100$$

であるから,

$$-20b + 70 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 5\sqrt{2} \sqrt{10b^2 - 60b + 100}$$

$$2(-2b + 7) = \sqrt{10(b^2 - 6b + 10)}$$

 $-2b + 7 > 0$ のもとで,

$$2(-2b + 7)^2 = 5(b^2 - 6b + 10)$$

$$3b^2 - 26b + 48 = 0$$

$$(b - 6)(3b - 8) = 0 \quad \therefore b = \frac{8}{3}$$

点 B の座標は

$$B \left(\frac{8}{3}, 2 \right) \quad (\text{カ})$$

(ii) $\frac{3}{10}\vec{OA} = \vec{OC}$, $\frac{1}{2}\vec{OB} = \vec{OD}$ により点 C, D を定めると,

$$\vec{OP} = \frac{10}{3}s\vec{OC} + 2t\vec{OD},$$

$$\frac{10}{3}s \geq 0, \quad 2t \geq 0, \quad \frac{10}{3}s + 2t \leq 1$$

を満たす点 P の存在範囲は, 三角形 OCD の周および内部であり, その面積 S は

$$S = \frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{10} \times 5\sqrt{2} \right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \sqrt{4^2 + 3^2} \right) \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{4} \quad (\text{キ})$$

(6)(i) 2倍角の公式を用いて

$$\begin{aligned}
 y &= 3\sqrt{3} \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \\
 &= 3\sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} (1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta \\
 &= \boxed{\frac{1}{2}} \sin 2\theta + \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos 2\theta + \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{2}}
 \end{aligned}$$

(ク) (ケ) (コ)

(ii) 加法定理を用いて

$$\begin{aligned}
 y &= \sin 2\theta \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\theta \sin \frac{\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \\
 &= \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より

$$-\frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\pi$$

であるから、

$$2\theta - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大, } 2\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \text{ のとき最小}$$

であり、 y は

$$\theta = \boxed{\frac{5}{12}\pi} \text{ のとき最大値 } \boxed{1 + \frac{5\sqrt{3}}{2}}$$

(シ) (サ)

$$\theta = \boxed{0} \text{ のとき最小値 } \boxed{2\sqrt{3}}$$

(セ) (ス)

をとる。

(7) 底面の正方形の4頂点を B, C, D, E として, 頂点 A から底面 BCDE におろした垂線の長さを

$$3 + x \quad (-3 < x < 3)$$

とおくと, 正方形 BCDE の対角線の長さは

$$BD = CE = 2\sqrt{9 - x^2}$$

正四角錐の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CE \times (3 + x) \\ &= \frac{2}{3} (9 - x^2)(3 + x) \\ &= \frac{2}{3} (3 - x)(3 + x)^2 \end{aligned}$$

x の関数とみて微分すると

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2}{3} \{-1 \cdot (3 + x)^2 + (3 - x) \cdot 2(3 + x)\} = 2(1 - x)(3 + x)$$

この符号変化から, V の増減は

x	(-3)	1	(3)
$\frac{dV}{dx}$	$+$	0	$-$
V		\nearrow 極大 \searrow	

V は $x = 1$ のとき極大かつ最大であり,

$$\text{最大値は } \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 4^2 = \boxed{\frac{64}{3}}$$

(ソ)

(注) 正角錐とは, 底面が正多角形で稜線の長さがすべて等しい角錐のことをいうが, 一般に認識されているかどうかは疑わしい。本問では, 底面 BCDE を固定すると, A から下ろした垂線の長さは $AB = AC = AD = AE$ のとき最大になるから, 体積 V の最大値を求める分には初めからこのことを仮定してよいので, 正角錐の定義を知らなくても支障はない。

〔 II 〕

- (1) C と C, E と E を入れかえても同じ文字列となるので, 異なる 7 文字として並べた上で重複をなくすと考えて, 全部で

$$\frac{7!}{2!2!} = \boxed{1260} \text{ 通り}$$

(タ)

である。

- (2) C で始まる文字列は

$$\frac{6!}{2!} = 360 \text{ 通り}$$

EC で始まる文字列は

$$5! = 120 \text{ 通り}$$

EE で始まる文字列は

$$\frac{5!}{2!} = 60 \text{ 通り}$$

$360 + 120 < 500 \leq 360 + 120 + 60$ より

$$a_{500} \text{ は E } \boxed{\text{E}} \text{ で始まる文字列の } 500 - (360 + 120) = 20 \text{ 番目}$$

(チ)

である。

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{\text{E}} & \boxed{\text{E}} & \boxed{\text{C}} & \boxed{\text{C}} & \square & \square & \square \\ \boxed{\text{E}} & \boxed{\text{E}} & \boxed{\text{C}} & \boxed{\text{I}} & \square & \square & \square \\ \boxed{\text{E}} & \boxed{\text{E}} & \boxed{\text{C}} & \boxed{\text{N}} & \square & \square & \square \end{array}$$

のいずれの並べ方も

$$3! = 6 \text{ 通り}$$

ずつあるから, a_{500} は

$$\text{EEC } \boxed{\text{S}} \text{ で始まる文字列の 2 番目}$$

(ツ)

であり,

$$a_{500} : \text{EEECSC } \boxed{\text{N}} \text{ I}$$

(テ)

である。

- (3) S で始まる文字列は

$$\frac{6!}{2!2!} = 180 \text{ 通り}$$

であり, 先頭が S でない最後の文字列は

$$1260 - 180 = 1080 \text{ 番目}$$

である。

$\boxed{S} \boxed{C} \boxed{C} \boxed{\quad} \boxed{\quad} \boxed{\quad} \boxed{\quad}$ は $\frac{4!}{2!} = 12$ 通り

$\boxed{S} \boxed{C} \boxed{E} \boxed{\quad} \boxed{\quad} \boxed{\quad} \boxed{\quad}$ は $4! = 24$ 通り

$\boxed{S} \boxed{C} \boxed{I} \boxed{C} \boxed{\quad} \boxed{\quad} \boxed{\quad}$ は 3 通り

であり, そのあとは

$\boxed{S} \boxed{C} \boxed{I} \boxed{E} \boxed{C} \boxed{E} \boxed{N}$

$\boxed{S} \boxed{C} \boxed{I} \boxed{E} \boxed{C} \boxed{N} \boxed{E}$

$\boxed{S} \boxed{C} \boxed{I} \boxed{E} \boxed{E} \boxed{C} \boxed{N}$

$\boxed{S} \boxed{C} \boxed{I} \boxed{E} \boxed{E} \boxed{N} \boxed{C}$

$\boxed{S} \boxed{C} \boxed{I} \boxed{E} \boxed{N} \boxed{C} \boxed{E}$

⋮

と続くから, a_n : $\boxed{S} \boxed{C} \boxed{I} \boxed{E} \boxed{N} \boxed{C} \boxed{E}$ は

$$n = 1080 + 12 + 24 + 3 + 5 = \boxed{1124} \text{ 番目}$$

の文字列である。

(ト)

〔Ⅲ〕 $x \leq 0$ または $x \geq a$ のとき

$$f(x) = x(x-2) + x(x-a) = 2x\left(x - \frac{a+2}{2}\right)$$

 $0 \leq x \leq 2$ のとき

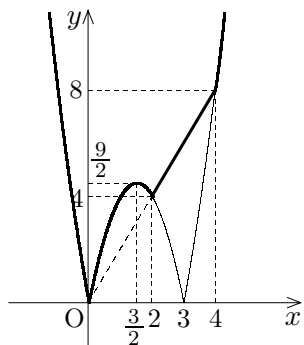
$$f(x) = -x(x-2) - x(x-a) = -2x\left(x - \frac{a+2}{2}\right)$$

 $2 \leq x \leq a$ のとき

$$f(x) = x(x-2) - x(x-a) = (a-2)x$$

(1) $a = 4$ のとき

$$\frac{a+2}{4} = \frac{3}{2} < 2, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\right) = \frac{9}{2}$$

であるから, $y = f(x)$ のグラフの概形は直線 $l: y = k$ と $y = f(x)$ のグラフが 4 点で交わるとき

$$4 < k < \frac{9}{2} \quad (*)$$

(2) $\frac{a+2}{4} \geq 2$ (かつ $a > 2$) すなわち $a \geq 6$ のとき, $f(x)$ は $x \leq 0$ で減少, $x \geq 0$ で増加するから, 直線 $y = f(a)$ と $y = f(x)$ のグラフは 2 点で交わる。したがって, 直線 $y = f(a)$ と $y = f(x)$ のグラフが 2 点で交わるための条件は,

$$a \geq 6 \quad \text{または} \quad "2 < a \leq 6 \quad \text{かつ} \quad f\left(\frac{a+2}{4}\right) < f(a)"$$

である。 $2 < a \leq 6$ のもとで $f\left(\frac{a+2}{4}\right) < f(a)$ は

$$2\left(\frac{a+2}{4}\right)^2 < a(a-2)$$

$$8a(a-2) - (a+2)^2 > 0$$

$$7a^2 - 20a - 4 > 0$$

$$\therefore \frac{10 + 8\sqrt{2}}{7} < a \leq 6$$

であるから, $a \geq 6$ とあわせて, 求める範囲は

$$\boxed{a > \frac{10 + 8\sqrt{2}}{7}} \quad (\text{二})$$

(3) $8\sqrt{2} = \sqrt{128}$, $11^2 = 121 < 128 < 144 = 12^2$ より

$$11 < 8\sqrt{2} < 12 \quad \therefore 3 < \frac{10 + 8\sqrt{2}}{7} < \frac{22}{7} < 4$$

であるから, $a > \frac{10 + 8\sqrt{2}}{7}$ を満たす最小の整数は

$$a = 4$$

$x \leq 0$ または $x \geq 4$ において

$$f(x) - f(4) = 2x(x - 3) - 8 = 2(x^2 - 3x - 4) = 2(x + 1)(x - 4)$$

(1)における図も参照して, $y = f(a)$ と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 \{8 - 2x(x - 3)\} dx \\ &\quad - \int_0^4 \{2x - 2x(x - 3)\} dx - \int_0^2 \{-2x(x - 3) - 2x\} dx \\ &= -2 \int_{-1}^4 (x + 1)(x - 4) dx + 2 \int_0^4 x(x - 4) dx + 2 \int_0^2 x(x - 2) dx \\ &= \frac{2}{6} \times (4 + 1)^3 - \frac{2}{6} \times 4^3 - \frac{2}{6} \times 2^3 \\ &= \frac{125 - 64 - 8}{3} \\ &= \boxed{\frac{53}{3}} \quad (\text{又}) \end{aligned}$$