

$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の値について

大塚美紀生

12年前に、 $\zeta(2)^{\text{注}1}$ の値を高校数学の範囲で求める方法がある雑誌の中で述べた(→[1])。その方針は、大学入試で出題された定積分

$$(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos(2n-1)x}{\cos x} dx \quad \text{注}2$$

の極限を2通りに表すことにより、フーリエ展開を高校流にアレンジしたというものである。本稿では、その基本的なアイデアは流用しながらも、定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2nx dx$$

の和を用いることにより、計算を若干見通しの良いものにして再発表したいと思う。

$\sum_{k=1}^{2n} I_k$ の計算

部分積分法により I_k を計算すると

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2kx dx \\ &= \left[x \cdot \frac{1}{2k} \sin 2kx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2kx dx \\ &= 0 - \frac{1}{2k} \left[-\frac{1}{2k} \cos 2kx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{(-1)^k - 1}{4k^2} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} I_k &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{(-1)^{2k-1} - 1}{(2k-1)^2} + \frac{(-1)^{2k} - 1}{(2k)^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \frac{3}{8} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

ここで,

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{8}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} I_k$$

さらに, $\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n I_k$ が収束するのであれば,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{8}{3} \sum_{n=1}^{\infty} I_n$$

としてよい。

2つの補題

補題 1 ^{注3} 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ \frac{x}{\sin x} & (-\pi < x < 0, 0 < x < \pi) \end{cases}$$

により定めると, $f(x)$ は $-\pi < x < \pi$ において微分可能であり, $f'(x)$ は $-\pi < x < \pi$ において連続である。

(証明) $x \neq 0$ のときに成り立つのは明らかであるから, $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることと, $f'(x)$ が $x = 0$ で連続であることを示せばよい。 $x \neq 0$ のとき

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{\sin x} - 1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin x < x < \tan x$ であるから,

$$0 = \frac{\sin x - \sin x}{x \sin x} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < \frac{\tan x - \sin x}{x \sin x} = \frac{1 - \cos x}{x \cos x}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cos x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x (1 + \cos x)} = 0 \end{aligned}$$

であるから, ハサミウチの原理より

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

$x \rightarrow -0$ については

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-x - \sin(-x)}{(-x) \sin(-x)} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = 0$$

であるから,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

となり, 特に $x = 0$ において $f(x)$ は微分可能である。

$x \neq 0$ のとき, 商の微分の公式により

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sin x} \right) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$$

$\sin x \leq x \leq \tan x$ より

$$\frac{\sin x - \sin x \cos x}{\sin^2 x} \geq \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} \geq \frac{\sin x - \tan x \cos x}{\sin^2 x} = 0$$

であるが, 最左辺について

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$

であるから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$$

となり, 特に $x = 0$ において $f'(x)$ は連続である。 □

補題 2 ^{注4} 関数 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ を含む开区間で微分可能であり, その導関数 $f'(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続であるとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(2n+1)x \, dx = 0$$

(証明) $a \leq x \leq b$ において $f'(x)$ が存在することを考えて, 部分積分法により

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) \sin(2n+1)x \, dx \\ &= \left[f(x) \left(-\frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)x \right) \right]_a^b + \frac{1}{2n+1} \int_a^b f'(x) \cos(2n+1)x \, dx \\ &= \frac{f(a) \cos(2n+1)a - f(b) \cos(2n+1)b}{2n+1} \\ & \quad + \frac{1}{2n+1} \int_a^b f'(x) \cos(2n+1)x \, dx \end{aligned}$$

$f'(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続であるから, $|f'(x)| \leq M$ を満たす正の定数 M が存在^{注5}し,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f'(x) \cos(2n+1)x \, dx \right| &\leq \int_a^b |f'(x)| |\cos(2n+1)x| \, dx \\ &\leq \int_a^b M \, dx = M(b-a) \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^b f(x) \sin(2n+1)x \, dx \right| \\
& \leq \frac{|f(a) \cos(2n+1)a| + |f(b) \cos(2n+1)b| + \left| \int_a^b f'(x) \cos(2n+1)x \, dx \right|}{2n+1} \\
& \leq \frac{|f(a)| + |f(b)| + M(b-a)}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(2n+1)x \, dx = 0$$

□

$\sum_{n=1}^{\infty} I_n$ の計算と $\zeta(2)$ の値

加法定理より

$$2 \cos 2kx \sin x = \sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x$$

であるから、関数 $f(x)$ を補題 1 のように

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ \frac{x}{\sin x} & (-\pi < x < 0, \quad 0 < x < \pi) \end{cases}$$

と定めると

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2kx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{2} \{\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x\} \, dx \\
\sum_{k=1}^n I_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{2} \sum_{k=1}^n \{\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x\} \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{2} \{\sin(2n+1)x - \sin x\} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2n+1)x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} x \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2n+1)x \, dx - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

補題 1 より $f(x)$ は $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ を含む開区間で微分可能であり、 $f'(x)$ は $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で連続であるから、補題 2 より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2n+1)x \, dx = 0$$

したがって、

$$\zeta(2) = -\frac{8}{3} \sum_{n=1}^{\infty} I_n = -\frac{8}{3} \left\{ -\frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \right\} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

注 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の値をはじめて発見したのはレオンハルト・オイラーであり、1735 年のことである。オイラーがとった方法は、正弦を級数展開して、代数方程式の根の n 乗和に関するニュートンの定理を(無限の場合に)あてはめたものであった。(→[2]) 現代の(大学での)数論の教科書では、正弦の無限乗積表示を対数微分したものとベルヌイ数による級数表示とを比較して値を求めるのが一般的のようである(→[3]) が、高度すぎて本稿の主旨には合わない。

$\zeta(s)$ は $s > 1$ のとき収束する級数で、現在ではリーマンのゼータ関数と呼ばれている。 $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ (素数 p 全体にわたる和)と表されるために、整数論の重要な定理と深い関わりをもつ。

注 2 1992 年に東京工業大学の前期第 5 問で出題された問題を指す。

注 3 補題 1 は、(高校数学の範囲ということで)広義積分を避けるためのものである。

注 4 実は、 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続という仮定だけで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, dx = 0$$

が成り立つ。これをリーマンの補題という。連続の仮定だけで示すには、積分区間の細分と連続関数値の誤差との 2 つのパラメタを処理するために、どうしても ε - δ 論法が必要となる。補題 2 で連続微分可能の仮定を追加したのは、 ε - δ 論法を避けるためのものである。この命題は、さらにルベグ積分可能まで仮定を弱めて一般化され、リーマン・ルベグの定理という名で知られている。

注 5 閉区間において連続関数が最大値と最小値をもつことは明らかではないが、高校では公理として認めているので、ここでもそれに従った。適当な微分積分学の教科書を参照されたい。

参考文献

- [1] 大塚美紀生, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の値について, 駿台フォーラム 12 (1994), pp.27-36.
- [2] アンドレ・ヴェイユ (足立恒雄, 三宅克哉訳), 数論, 日本評論社(1987).
- [3] J. P. セール (彌永健一訳), 数論講義, 岩波書店(1972).
- [4] 入江昭二, 垣田高夫(共著), フーリエの方法, 内田老鶴圃(1974)
- [5] 加藤久子, 概説微分積分, サイエンス社(1999)