

図チャレ 第1回 (2001年10月)

長方形内に置かれた三角形の面積は，もとの長方形の面積の $\frac{1}{2}$ を越えないことを示せ。

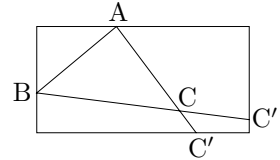
出典：1994年 名古屋大学

解答

三角形の頂点を A, B, C とする。必要ならば適当に平行移動することにより， A と B は長方形の辺上にあるとしてよい。

AC または BC を延長して長方形の辺と交わる点を C' とすると

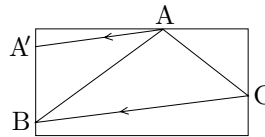
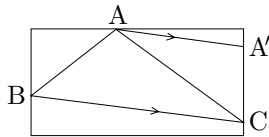
$$\triangle ABC \cong \triangle ABC'$$



であるから，はじめから頂点 C が長方形の辺上にある場合で示せば十分である。

どの2頂点も長方形の同じ辺上にないとき，ある2頂点は長方形の対辺上にある。

B と C が長方形の対辺上にあるとき，



A から BC に平行な直線をひいて長方形の辺と交わる点を A' とすると

$$\triangle ABC \text{ と } \triangle A'BC \text{ の面積は等しい}$$

が， $A'B$ または $A'C$ は長方形の辺上にある。

必要ならば頂点の名前をつけかえて， $A'B$ が長方形の辺上にあるとして一般性を失わない。

$A'B = a$ とし， $A'B$ を含む長方形の辺の長さを x ，その隣接辺の長さを y とすると，

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} ay \leq \frac{1}{2} xy$$

(証明おわり)