

図チャレ 第2回 (2001年11月)

円に外接する平行四辺形が与えられているとき、この平行四辺形はひし形であることを示せ。

コメント：あとから解答を見ると「な～んだ」ということになりましたが、意外に論じにくい問題です。「対角線の交点が円の中心に一致するから明らか」と錯覚してしまいそうですが、そもそもそれを証明する問題とも言えるので、それでは循環論法となってしまいます。ひょっとしたら、対角線の交点にこだわらない方が証明しやすいかも知れません。

解答

円の中心を O とし、その円に外接する平行四辺形の頂点を順に A, B, C, D とする。辺 AB, BC はともに頂点 B から円にひいた接線であるから、

$$\angle ABO = \angle CBO$$

同様に、 $\angle ADO = \angle CDO$ も成り立つ。

平行四辺形の性質より $\angle ABC = \angle ADC$ であるから、

$$\angle ABO = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ADC = \angle ADO$$

O から辺 AB, AD におろした垂線の足をそれぞれ E, F とすると、

$$OE = OF \quad (\text{円の半径})$$

$\angle EBO = \angle FDO$ であるから、直角三角形の合同条件より

$$\triangle EBO \cong \triangle FDO, \quad \text{特に } EB = FD$$

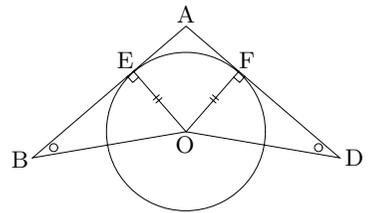
辺 AB, AD は点 A から円にひいた接線であるから、

$$AE = AF$$

であるから、

$$AB = AE + EB = AF + FD = AD$$

平行四辺形 $ABCD$ は、もともと対辺の長さは等しかったから 4 辺の長さが等しいことになり、ひし形であることが示された。 (おわり)



別証(アウトライン)

$\angle ABO = \angle ADO$ を導いたあと、

$$\angle DAB + \angle ABO + \angle BOD + \angle ADO = 360^\circ$$

$$\angle ABO = \angle CBO, \quad \angle ADO = \angle CDO$$

が成り立つことに注意して、平行四辺形の対角の大きさが等しいことより

$$\angle BOD = 180^\circ$$

を示し、 $AB = AD$ を示すこともできる。