

## 図チャレ 第3回 (2001年12月)

一辺の長さが1である正方形に含まれる正三角形の一辺の長さの最大値を求めよ。

コメント：単に最大値を言い当てるだけでは正解とは認められません。その値が実際にとり得ること、最大であることをきちんと論じる必要があります。

### 解答

座標平面上において、正方形の4頂点を  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$  とする。必要ならば平行移動と回転移動を行なうことにより、正三角形の2頂点は  $A(s, 0)$ ,  $B(0, t)$  ( $s^2 + t^2 > 0$ ) としてよい。原点を  $O$  とする。

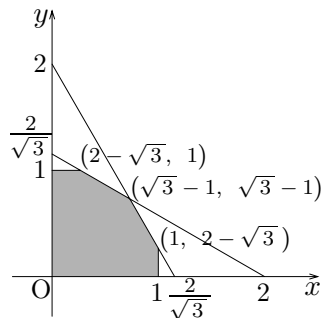
$\angle OAB$  または  $\angle OBA$  は  $45^\circ$  以下であることより、 $A, P, B$  の順に反時計回りとなることに注意する。正三角形のもう一つの頂点  $P$  について

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}(s, t) + \frac{\sqrt{3}}{2}(t, s) = \left( \frac{1}{2}s + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{1}{2}t \right)$$

が成り立つ。頂点  $P$  が正三角形の周および内部にあるための条件は

$$0 < \frac{1}{2}s + \frac{\sqrt{3}}{2}t \leq 1, \quad 0 < \frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{1}{2}t \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

であり、 $st$  平面上に図示すると次図の網目部分となる。ただし、座標軸上は含まず、その他の境界線上は含む。



よって、正三角形の一辺の長さ  $\sqrt{s^2 + t^2}$  の最大値は

$$\max \left\{ 1, \sqrt{1^2 + (2 - \sqrt{3})^2}, \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \right\} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \quad (\text{答})$$