

図チャレ 第5回(2002年2月)

円 C 上に 2 定点 A, B と動点 P があり, 三角形 ABP の内心を I とし, PI の延長と円 C との交点を Q とする。このとき, 動点 P の位置に関係なく, $QA = QB$ であることを証明せよ。

コメント: 2001 年, 2002 年のセンター試験で続けて出題された題材です。受験生の間では有名?

解答

I は $\triangle PAB$ の内心であり, PI は $\angle APB$ の二等分線であることと, 弧 QB に対する円周角に注目して

$$\angle IPA = \angle IPB = \angle QAB$$

三角形の外角は, それと隣り合わない 2 つの内角の和に等しいことより,

$$\angle QIA = \angle IAP + \angle IPA$$

内角 A の二等分線 AI についても PI と同様に

$$\angle IAP = \angle IAB$$

以上をまとめると,

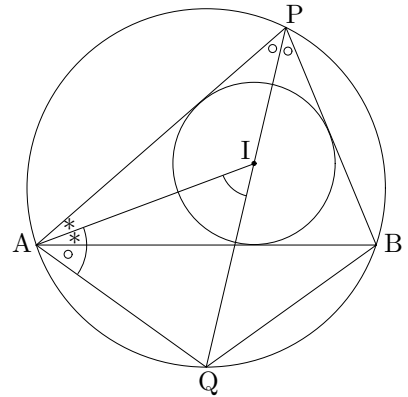
$$\begin{aligned} \angle QIA &= \angle IAP + \angle IPA \\ &= \angle IAB + \angle QAB \\ &= \angle QAI \end{aligned}$$

$$\therefore QA = QI$$

頂点 B の周辺についても同様に考えて $QB = QI$ であるから,

$$QA = QB$$

である。



(証明おわり)