

## 図チャレ 第6回 (2002年3月)

1 辺の長さが  $a$  の正四面体  $ABCD$  が与えられているとする。直径が  $b$  の十分に長い円柱の内部に、正四面体  $ABCD$  がすっぽり入るとき、 $a, b$  の満たすべき不等式を求めよ。ただし、四面体  $ABCD$  の重心  $G$  は円柱の中心軸上にあるものとする。

出典：2002 年 東京都立大学 理学部

解答

一辺の長さ  $a$  の正四面体は、一辺の長さ  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  (各面の対角線の長さ  $a$ ) の立方体の 4 頂点を結ぶ四面体として実現できるから、

$$AB \perp CD, (AB \text{ と } CD \text{ の距離}) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

である。そこで、座標空間において

$$G = O(0, 0, 0), A\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right), B\left(-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right), \\ C\left(0, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{2}}\right), D\left(0, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$$

として一般性を失わない。円柱の中心軸の方向ベクトルを

$$\vec{n} = (p, q, r) \quad (p^2 + q^2 + r^2 = 1)$$

とおく。

$A, B, C, D$  から中心軸におろした垂線の足をそれぞれ  $A', B', C', D'$  とすると、 $OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$  より

$$PP' = \sqrt{\frac{3}{8}a^2 - OP'^2} \quad (P = A, B, C, D)$$

であるから、

「正四面体  $ABCD$  が直径  $b$  (半径  $\frac{b}{2}$ ) の円柱にすっぽり入る」

$$\iff \max_{p, q, r} \{AA', BB', CC', DD'\} \text{ の最小値が } \frac{b}{2} \text{ より小}$$

$$\iff \sqrt{\frac{3}{8}a^2 - \min_{p, q, r} \{OA'^2, OB'^2, OC'^2, OD'^2\}} \text{ の最小値} < \frac{b}{2}$$

$$\iff -\min_{p, q, r} \{OA'^2, OB'^2, OC'^2, OD'^2\} \text{ の最小値} < \frac{b^2}{4} - \frac{3}{8}a^2$$

$$\iff \min_{p, q, r} \{OA'^2, OB'^2, OC'^2, OD'^2\} \text{ の最大値} > \frac{3}{8}a^2 - \frac{b^2}{4}$$

..... ①

正射影の公式と  $|\vec{n}| = 1$  より

$$OA' = |\vec{OA} \cdot \vec{n}| = \frac{a}{2} \left| p + \frac{r}{\sqrt{2}} \right|, \quad OB' = |\vec{OB} \cdot \vec{n}| = \frac{a}{2} \left| -p + \frac{r}{\sqrt{2}} \right|$$

$$OC' = |\vec{OC} \cdot \vec{n}| = \frac{a}{2} \left| q - \frac{r}{\sqrt{2}} \right|, \quad OD' = |\vec{OD} \cdot \vec{n}| = \frac{a}{2} \left| q + \frac{r}{\sqrt{2}} \right|$$

であるから,

$$\begin{aligned} & \min_{p, q, r} \{OA', OB', OC', OD'\} \\ &= \min_{\substack{p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0 \\ p^2 + q^2 + r^2 = 1}} \left\{ \frac{a}{2} \left| p - \frac{r}{\sqrt{2}} \right|, \frac{a}{2} \left| q - \frac{r}{\sqrt{2}} \right| \right\} \dots\dots ② \end{aligned}$$

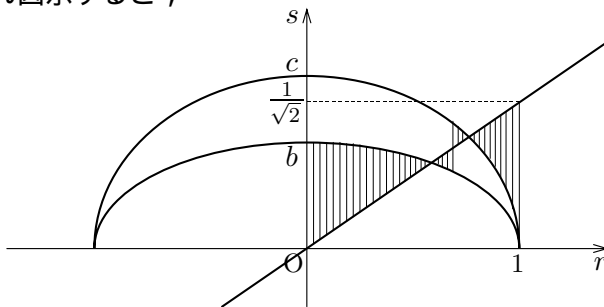
と考えるとよい。  $p^2 + q^2 = 1 - r^2$  より

$$p = \sqrt{1 - r^2} \cos \theta, \quad q = \sqrt{1 - r^2} \sin \theta \quad \left( 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

と表され,  $\theta$  を固定して  $rs$  平面上に 3 つのグラフ

$$s = \sqrt{1 - r^2} \cos \theta, \quad s = \sqrt{1 - r^2} \sin \theta, \quad s = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

をそれぞれ図示すると,



ただし,  $b = \min\{\cos \theta, \sin \theta\}$ ,  $c = \max\{\cos \theta, \sin \theta\}$  である。

図より

$$\min_{\substack{p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0 \\ p^2 + q^2 + r^2 = 1}} \left\{ \left| p - \frac{r}{\sqrt{2}} \right|, \left| q - \frac{r}{\sqrt{2}} \right| \right\} \text{の最大値は } \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (r = 1)$$

であるから, ②, ①より求める条件は

$$\left( \frac{a}{2\sqrt{2}} \right)^2 > \frac{3}{8}a^2 - \frac{b^2}{4} \quad \therefore b > a \quad (\text{答})$$

(注) 一辺の長さ  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  の立方体に注目した時点で,  $b > a$  が十分条件であることはわかっているが, 必要条件 ( $b \leq a$  で不可能) であることの論証は難しい。