

## 図チャレ 第7回 (2002年4月)

平面上に三角形  $ABC$  と 2 つの正三角形  $ADB$ ,  $ACE$  とがある。ただし点  $C$ , 点  $D$  は直線  $AB$  に関して反対側にあり, また点  $B$ , 点  $E$  は直線  $AC$  に関して反対側にある。線分  $AB$  の中点を  $K$ , 線分  $AC$  の中点を  $L$ , 線分  $DE$  の中点を  $M$  とする。線分  $KL$  の中点を  $N$  とするとき, 直線  $MN$  と直線  $BC$  とは垂直であることを示せ。

出典: 2002年 名古屋工業大学

### 解答

長方形  $AKDD'$  および長方形  $ALEE'$  をそれぞれ三角形  $ABC$  の外側に作り,  $D'E'$  上に点  $M'$  を

$$AM' \parallel MN$$

となるようにとる。このとき,  $M'$  が  $D'E'$  の中点となることをまず示す。

$K, L$  から  $MN$  に平行な直線をひき, 線分  $DE$  と交わる点をそれぞれ  $K', L'$  とおくと,  $N$  は  $KL$  の中点であるから

$$K'M = ML'$$

$M$  は  $DE$  の中点であるから

$$DK' = L'E$$

$AM' \parallel K'K \parallel L'L$ ,  $D'A \parallel DK$  より

$$\begin{aligned} (\text{D' から } AM' \text{ におろした垂線の長さ}) &= (\text{D から } K'K \text{ におろした垂線の長さ}) \\ &= (\text{E から } L'L \text{ におろした垂線の長さ}) \\ &= (\text{E' から } AM' \text{ におろした垂線の長さ}) \end{aligned}$$

であるから,  $M'$  は  $D'E'$  の中点である。

点  $A$  に関して点  $C$  と対称な点を  $C'$  とすると,  $D', E'$  の定め方より

$$AB : AD' = AC' : AE' = 2 : \sqrt{3}$$

$$\angle BAC' = \angle D'AE' = \angle C'AD' + 90^\circ$$

であるから

$$\triangle ABC' \sim \triangle AD'E'$$

したがって,  $BC'$  の中点を  $P$  とすると

$$AM' \perp AP$$

であり, 三角形  $C'BC$  において中点連結定理をあてはめると,

$$BC \parallel AP \perp AM' \parallel MN$$

(証明おわり)

(注) 複素数を用いると, もっと楽に証明できる。複素数平面上において原点に頂点  $A$  をおき, 2 頂点  $B, C$  を表す複素数をそれぞれ  $\beta, \gamma$  として,  $\overrightarrow{MN}$  を表す複素数を求めると  $\frac{\sqrt{3}}{4}i(\beta - \gamma)$  となるからである。

