

図チャレ 第9回 (2002年6月)

- (1) すべての辺の長さが1である正五角錐の体積 V_1 を求めよ。
 (2) 一辺の長さ1のサッカーボール体の体積 V_2 を求めよ。ここでサッカーボール体と呼ぶ立体は、表面が正六角形20枚、正五角形12枚から成る多面体のことを指す。

コメント：サッカーワールドカップ日韓同時開催記念です。

解答

- (1) まず、一辺の長さ1の正五角形の対角線の長さ x と外接円の半径 r を求める。

正五角形の頂点を A, B, C, D, E とし、対角線 AC と対角線 BD の交点を F とする。正五角形 ABCDE は3つの三角形 ABC, ACD, ADE に分割できるから、内角の総和は $180^\circ \times 3 = 540^\circ$ であり、

一つの内角の大きさは 108°

である。正五角形 ABCDE はある円に内接することに注意すると、弧 BC, CD, DE に対する円周角は等しいから、対角線 AC, AD は $\angle BAE$ を3等分する。他の頂角についても同様であるから、特に $\angle CAD = \angle CDF$, $\angle ACD = \angle DCF$ であり、

$$\triangle ACD \sim \triangle DCF$$

が成り立つ。これから $DC = DF$ であり、同様に

$$AF = AB = 1$$

である。

正五角形の対角線の長さを x とすると、この相似関係より

$$x : 1 = 1 : (x - 1)$$

$$x(x - 1) = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (> 0)$$

$\triangle ABC$ に余弦定理をあてはめると、

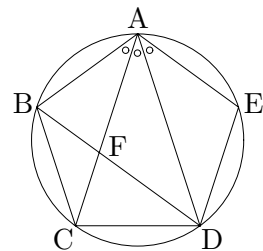
$$\cos 108^\circ = \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - x^2}{2} = \frac{2 - (x + 1)}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

公式 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$\sin 108^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

正五角形 ABCDE の外接円の半径 r は、正弦定理より

$$r = \frac{x}{2 \sin 108^\circ} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$$



いま，正五角錐の底面にない頂点を P とし， P から底面におろした垂線の足を H とする。頂点 P から底面の頂点までの距離がすべて 1 で等しいから， H は底面の中心(外接円の中心)となる。PH の長さを h とすると，ピタゴラスの定理より

$$h = \sqrt{1^2 - r^2} = \sqrt{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

底面の正五角形の面積 S は

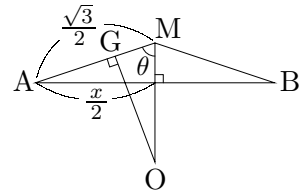
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2 \sin 72^\circ \times 5 = \frac{5}{2}r^2 \sin 108^\circ \\ &= \frac{5}{2} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{16} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

よって，一辺の長さ 1 の正五角錐の体積 V_1 は

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{16} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{24} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) まず，一辺の長さ 1 の正二十面体の体積 V_0 を求める。

正二十面体の隣り合う正三角形を $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ とし，隣接辺 CD の中点を M とする。正二十面体の中心 O から面 ACD におろした垂線の足 G は $\triangle ACD$ の外心であるが， $\triangle ACD$ は正三角形であるから G は重心となり， AM を 2:1 に内分する。



正二十面体の一つの頂点には 5 枚の正三角形が集まり，それは正五角錐の側面があることと同じであるから，線分 AB は一辺の長さ 1 の正五角形の対角線であり，線分 AB の長さは (1) で求めた x の値である。 $\angle AMO = \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\tan^2 \theta} &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{5}} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{12 - (1 + \sqrt{5})^2}{(1 + \sqrt{5})^2} \\ &= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^2 \\ \therefore \tan \theta &= \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

直角三角形 OMG に注目すると， OG の長さ h_0 は

$$h_0 = MG \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$$

$\triangle ACD$ の面積 S_0 は

$$S_0 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，一辺の長さ 1 の正二十面体の体積 V_0 は

$$V_0 = \frac{1}{3} S_0 h_0 \times 20 = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12}$$

一辺の長さ 1 のサッカーボール体は，一辺の長さ 3 の正二十面体から 12 個の頂点部分にある一辺の長さ 1 の正五角錐を取り除いた立体であるから，その体積 V_2 は

$$\begin{aligned} V_2 &= 3^3 V_0 - 12 V_1 = 27 \times \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12} - 12 \times \frac{5 + \sqrt{5}}{24} \\ &= \frac{45(3 + \sqrt{5}) - 2(5 + \sqrt{5})}{4} \\ &= \frac{125 + 43\sqrt{5}}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$