

図チャレ 第10回 (2002年7月)

三角形 OAB は $OA = AB$ なる二等辺三角形とし、その外側に三角形 OAB と相似な $OB = BC$ なる二等辺三角形 OBC をつくる。辺 OB の垂直二等分線と辺 BC の垂直二等分線の交点を P とするとき、 $\angle POA$ は直角であることを示せ。

コメント：6月の問題が重ためだったので、今月は中学生でも簡単に解ける問題にしました。とはいえ、油断すると循環論法に陥ってしまうので、くれぐれもご注意を。

証明 1

$\angle AOB = \angle ABO = \angle BOC = \angle BCO = \theta$ とおき、
OB の中点を M、OC の中点を N とする。

MP は辺 OB の垂直二等分線であるから $PO = PB$ であり、

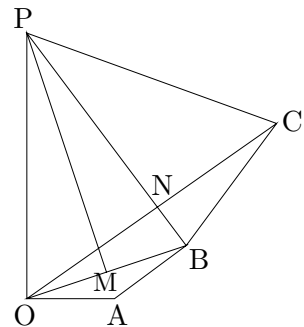
$$\angle POB = \angle PBO \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

である。 $PO = PB = PC$ および $OB = BC$ より、BP は辺 OC の垂直二等分線であり、中点 N を通るから、直角三角形 OBN に注目すると、

$$\angle PBO = \angle NBO = 90^\circ - \theta \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle POA = \angle POB + \angle AOB = (90^\circ - \theta) + \theta = 90^\circ \quad (\text{おわり})$$



証明 2

$PO = PB = PC$ より P は $\triangle OBC$ の外心であり、 $\triangle OBC$ の外接円の O における接線を l とすると、

$$OP \perp l$$

である。接弦定理より

l と OB のなす角は $\angle OCB$ に等しい。

一方、 $OA = AB$, $\triangle OAB \sim \triangle OBC$ より

$$\angle AOB = \angle OBA = \angle OCB$$

であるから、点 A は l 上にある。

よって、 $\angle POA$ は直角である。

(おわり)