

## 図チャレ 第11回 (2002年8月)

異なる  $n$  個の点  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  はどの3点も同一直線上になく、どの2点も線分で結ばれている。

すべての線分  $P_i P_j$  に任意に「向き」をつけるとき、その「向き」に沿って  $n$  個すべての点を通る経路が存在することを示せ。

コメント：一方通行路があっても目的地には必ず到達できるということです。

### 解答

1つの経路が通る点の最大個数を  $s$  とし、適当に点の番号を付け替えて、

経路  $R: P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_s$  は通る点の個数が最大

として一般性を失わない。

$s < n$  であるとする、 $P_n$  は  $P_1, \dots, P_s$  のいずれとも異なる点である。ここで、 $P_n \rightarrow P_1$  と向きづけられているとすれば、 $P_n \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_s$  という向きのついた経路が存在して  $s$  の最大性に反してしまうから、

$P_1 \rightarrow P_n$

と向きが定まる。次に、 $P_n \rightarrow P_2$  とすれば、 $P_1 \rightarrow P_n \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_s$  という経路が存在して  $s$  の最大性に反してしまうから、

$P_2 \rightarrow P_n$

と向きが定まる。以下、同様にして、

$P_3 \rightarrow P_n, \dots, P_{s-1} \rightarrow P_n$

と向きが定まる。

このとき、 $P_s \rightarrow P_n$  とすれば、

$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{s-1} \rightarrow P_s \rightarrow P_n$  は  $s$  の最大性に反する

こととなり、 $P_n \rightarrow P_s$  とすれば、

$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{s-1} \rightarrow P_n \rightarrow P_s$  は  $s$  の最大性に反する

こととなる。よって、 $s < n$  である限り矛盾が生じることになり、

$$s = n$$

つまり  $n$  個すべての点を通る経路が存在する。

(おわり)