

図チャレ 第13回 (2002年10月)

- (1) 凸多角形 P の内部に円 C があるとき, P の周は C の周より長いことを示せ。
 (2) 円 C の内部に凸多角形 Q があるとき, C の周は Q の周より長いことを示せ。

解答

- (1) 円 C の中心 O と P の各頂点を線分で結び, O を頂点とする三角形に分割して考えることにより, P の隣り合う2頂点 A, B に対して辺 AB が $\angle AOB$ 内にある C の円弧より長いことを示せばよい。

辺 AB に平行な C の接線と線分 OA, OB との交点をそれぞれ A', B' とすると,

$$AB \geq A'B'$$

線分 $A'B'$ と円 C の接点を T とし,

$$\angle A'OT = \alpha, \quad \angle B'OT = \beta$$

とおけば, 円 C の半径を r として

$$A'B' = r(\tan \alpha + \tan \beta), \quad (\text{弧長}) = r(\alpha + \beta)$$

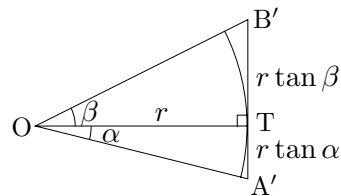
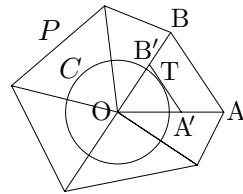
ここで, $\triangle OA'B'$ と扇形の面積を比べると,

$$\frac{1}{2}r(\tan \alpha + \tan \beta) \times r > \frac{1}{2}r^2(\alpha + \beta)$$

$$\therefore AB \geq A'B' = r(\tan \alpha + \tan \beta) > r(\alpha + \beta)$$

以上より, P の周が C の周より長いことが示された。

(おわり)



- (2) $n \geq 4$ として, Q の連続する4頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする。

(i) 辺 A_1A_2 の A_2 の側への延長と辺 A_3A_4 の A_3 の側への延長が C の内部または周上に交点 A をもつとき, 三角不等式より

$$A_2A_3 < A_2A + AA_3$$

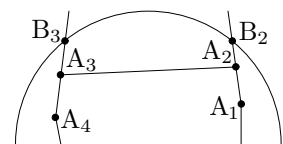
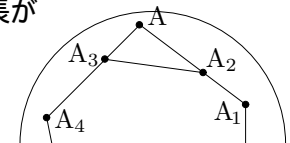
であるから, $n - 1$ の場合に帰着される。

(ii) 交点 A が C の外部ある, または交点 A が存在しないとき, 辺 A_1A_2 の A_2 の側への延長と C の交点を B_2 , 辺 A_3A_4 の A_3 の側への延長と C の交点を B_3 とする。

$$A_2A_3 < A_2B_3 + B_3A_3 < A_2B_2 + B_2B_3 + B_3A_3$$

であるから, Q が C の(周および)内部にある別の凸 n 角形で Q より周の長いものに帰着される。

A_1 を端点とする半直線 A_1A_2 と A_4 を端点とする半直線 A_3A_4 が C の内部に交点を持たない限り (ii) の作業を続け, 持つ場合は (i) の変形を行なうことにより, 最終的には円 C に内接する n 角形または凸 $n - 1$ 角形に帰着される。円に内接する多角形の場合は, 各辺より両端を結ぶ円弧の方が長いことより, C の周は Q の周より長いことがわかる。



結局， Q が三角形の場合に示されれば十分である。

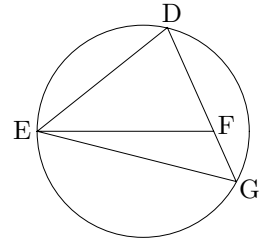
三角形の場合，平行移動させることにより，はじめから2頂点は円 C 上にあるとしてよい。円 C 上の2頂点を D , E とし，三角形 Q の残りの頂点を F とする。

DF の F の側への延長と C との交点を G とすると

$$EF < EG + GF$$

であるから，

$$DE + EF + FD < DE + EG + GD < (C \text{の周の長さ})$$



(おわり)