

図チャレ 第14回 (2002年11月)

正四面体 OABC の辺 OA, OB, OC のそれぞれの上に点 P, Q, R を $0 < OP \leq OQ \leq OR$ を満たすようにとる。

- (1) $\angle QPR, \angle QRP$ はいずれも鋭角であることを示せ。
 (2) $\angle PQR$ が直角になる場合があるか。

解答

$OP = a, OQ = b, OR = c, QR = p, RP = q, PQ = r$ とおく。

- (1) $\triangle OQR, \triangle ORP, \triangle OPQ$ に余弦定理をそれぞれあてはめると

$$p^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ = b^2 - bc + c^2$$

$$q^2 = c^2 - ca + a^2$$

$$r^2 = a^2 - ab + b^2$$

であるから,

$$q^2 + r^2 - p^2 = 2a^2 - ca - ab + bc = a^2 + (a-b)(a-c)$$

$$p^2 + q^2 - r^2 = 2c^2 - bc - ca + ab = c^2 + (c-a)(c-b)$$

仮定より $0 < a \leq b \leq c$ であるから

$$q^2 + r^2 - p^2 \geq a^2 > 0, \quad p^2 + q^2 - r^2 \geq c^2 > 0$$

であり, $\angle QPR, \angle QRP$ はいずれも鋭角である。

(おわり)

- (2) (1) の考察から

$$r^2 + p^2 - q^2 = 2b^2 - ab - bc + ca = 2b^2 - (c+a)b + ca$$

ここで, 2次関数

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - (c+a)x + ca \\ &= 2\left(x - \frac{c+a}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}(c+a)^2 + ca \\ &= 2\left(x - \frac{c+a}{4}\right)^2 - \frac{a^2 - 6ac + c^2}{8} \end{aligned}$$

を考えると,

$$f(a) = 2a^2 - (c+a)a + ca = a^2 > 0$$

$$f(c) = 2c^2 - (c+a)c + ca = c^2 > 0$$

であるから, $f(x) = 0$ かつ $a \leq x \leq c$ を満たす実数 x が存在するための条件は,

$$a^2 - 6ac + c^2 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad a \leq \frac{a+c}{4} \leq c$$

$$\frac{c}{a} \geq 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{かつ} \quad \frac{c}{a} \geq 3 \quad \therefore \frac{c}{a} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

a, c がこの条件を満たすときに限り $r^2 + p^2 = q^2$ となる b が存在するから,

$$\left. \begin{array}{l} OR \geq (3 + 2\sqrt{2})OP \text{ のとき } \angle PQR \text{ が直角となる場合がある} \\ OR < (3 + 2\sqrt{2})OP \text{ のとき } \angle PQR \text{ が直角となる場合はない} \end{array} \right\} \text{(答)}$$