

図チャレ 第15回 (2002年12月)

各頂点の角が等しい n 角形が円に内接しているとする。

- (1) n が奇数であるとき, 正 n 角形であることを示せ。
- (2) n が偶数であるとき, 必ずしも正 n 角形でないことを反例をもって示せ。

出典: 1991年 お茶の水女子大学 理学部

解答

円に内接する等角 n 角形の頂点を P_1, P_2, \dots, P_n とする。

- (1) $n = 3$ のとき, 内角の大きさがすべて等しい三角形は正三角形となる。

以下, $n \geq 5$ とし, $\triangle P_{k-1}P_kP_{k+1}$ と $\triangle P_{k+2}P_{k+1}P_k$ を考える。仮定より

$$\angle P_{k-1}P_kP_{k+1} = \angle P_{k+2}P_{k+1}P_k$$

円周角の性質より

$$\angle P_kP_{k-1}P_{k+1} = \angle P_{k+1}P_{k+2}P_k$$

したがって,

$$\angle P_{k-1}P_{k+1}P_k = \angle P_{k+2}P_kP_{k+1}$$

が成り立ち, 辺 P_kP_{k+1} は共通であるから,

$$\triangle P_{k-1}P_kP_{k+1} \equiv \triangle P_{k+2}P_{k+1}P_k$$

特に

$$P_{k-1}P_k = P_{k+1}P_{k+2}$$

が成り立つ。 n は奇数であるから,

$$P_1P_2 = P_3P_4 = \dots = P_{n-2}P_{n-1} = P_nP_1 = P_2P_3 = P_4P_5 = \dots$$

となって, すべての辺の長さは等しくなる。

ゆえに, n が奇数であるとき, 円に内接する等角 n 角形は正 n 角形である。

(おわり)

- (2) $n = 4$ のときは, 正方形でない長方形が反例となる。以下, $n = 2m, m \geq 3$ とし, 円周上の点 P_1, P_2, \dots, P_{2m} を次の条件を満たすように配置する。

- (i) m 角形 $P_1P_3 \dots P_{2m-1}$ は正 m 角形である
- (ii) m 角形 $P_2P_4 \dots P_{2m}$ は正 m 角形である
- (iii) $2m$ 角形 $P_1P_2P_3 \dots P_{2m-1}P_{2m}$ は正 $2m$ 角形でない

一つの円に内接する 2 つの正 m 角形を $2m$ 個の頂点が等間隔にはならないようにずらして配置することにより, このような $2m$ 角形は実際に存在する。このとき, 2 つの正 m 角形は合同であるから

$$P_1P_3 = P_2P_4 = P_3P_5 = P_4P_6 = \dots = P_{n-2}P_n = P_{n-1}P_1$$

対応する円周角の大きさは等しくなるから

$$\angle P_1P_2P_3 = \angle P_2P_3P_4 = \angle P_3P_4P_5 = \dots = \angle P_{n-1}P_nP_1 = \angle P_nP_1P_2$$

この $2m$ 角形が反例となって, n が偶数であるとき, 円に内接する等角 n 角形は必ずしも正 n 角形ではない。

(おわり)

