

## 図チャレ 第16回 (2003年1月)

$n$  を5以上の自然数とする。正  $n$  角形  $A_1A_2A_3 \cdots A_n$  の外接円の中心を  $O$  とし、直線  $A_1A_2$  と直線  $A_3A_4$  の交点を  $P$  とする。このとき、4点  $O, A_1, P, A_3$  は同一円周上にあることを証明せよ。

解答

$\angle PA_2A_3, \angle PA_3A_2$  はともに正  $n$  角形の一つの外角であるから、

$$\angle PA_2A_3 = \angle PA_3A_2 = \frac{2\pi}{n}$$

三角形の内角の総和は  $\pi$  であるから、 $\triangle PA_2A_3$  において

$$\angle A_1PA_3 = \angle A_2PA_3 = \pi - 2 \times \frac{2\pi}{n}$$

円の中心角について

$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \cdots = \angle A_{n-1}OA_n = \angle A_nOA_1 = \frac{2\pi}{n}$$

であり、特に

$$\angle A_1OA_3 = 2 \times \frac{2\pi}{n}$$

であるから、

$$\angle A_1OA_3 + \angle A_1PA_3 = \pi$$

円周角の性質より、4点  $O, A_1, P, A_3$  は同一円周上にある。

(おわり)

