

図チャレ 第17回 (2003年2月)

定円 C の内部に定点 P をとり、この点 P で互いに外接する2つの円 C_1, C_2 はともに円 C に内接しながら変化する。円 C_1 の半径を r_1 、円 C_2 の半径を r_2 とするとき、 $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ は一定であることを示せ。

解答

円 C, C_1, C_2 の中心をそれぞれ O, O_1, O_2 とし、円 C の半径を r 、 $OP = a$ 、 $\angle OPO_1 = \theta$ とおく。 $\triangle OPO_1$ 、 $\triangle OPO_2$ にそれぞれ余弦定理をあてはめると

$$\cos \theta = \frac{a^2 + r_1^2 - (r - r_1)^2}{2ar_1}$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{a^2 + r_2^2 - (r - r_2)^2}{2ar_2}$$

補角の公式より

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

であるから、

$$\frac{a^2 + r_1^2 - (r - r_1)^2}{2ar_1} + \frac{a^2 + r_2^2 - (r - r_2)^2}{2ar_2} = 0$$

$$r_2(a^2 + 2r_1r - r^2) + r_1(a^2 + 2r_2r - r^2) = 0$$

$$\therefore (r_1 + r_2)(r^2 - a^2) = 4r_1r_2r$$

点 P は円 C の内部にあることより $r^2 - a^2 > 0$ であるから、

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2} = \frac{4r}{r^2 - a^2}$$

$$\therefore \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{4r}{r^2 - a^2} \quad (\text{一定})$$

(証明おわり)

