

図チャレ 第18回 (2003年3月)

平面上に相異なる5点 O, P_0, P_1, P_2, P_3 があり,
 $OP_0 = OP_1 = OP_2 = OP_3, \angle P_0OP_1 = \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3$
 を満たす。直線 OP_0 上に点 A をとるとき, 四角形 $AP_1P_2P_3$ がひし形ならば
 $A = O$ または $A = P_0$
 であることを示せ。

解答

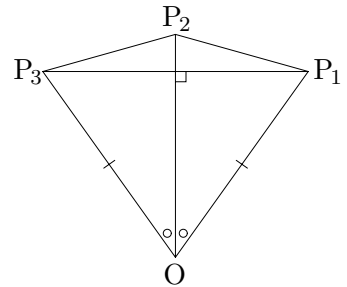
$OP_1 = OP_3, \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3$ であるから,
 OP_2 と P_1P_3 は P_1P_3 の中点で直交する
 ことがわかる。

ひし形の対角線は互いに中点で直交するから, 点 A は
 直線 OP_2 上にあり, 仮定とあわせて

点 A は2直線 OP_0, OP_2 の共有点
 である。

(i) P_2 が直線 OP_0 上にないとき
 2直線 OP_0, OP_2 の共有点は O だけであるから
 $A = O$

(ii) P_2 が直線 OP_0 上にあるとき
 $OP_0 = OP_2, P_0 \neq P_2$ より
 O は P_0P_2 の中点
 となり, $2\angle P_0OP_1 = \angle P_0OP_2 = 180^\circ$ であるから
 $\angle P_0OP_1 = 90^\circ$
 よって, P_0P_2 と P_1P_3 は O で直交し, 互いに二等分するから
 $A = P_0$



(証明おわり)