

図チャレ 第20回 (2003年5月)

鋭角三角形 ABC の外心を O とし，AO の延長と外接円との交点を P とする。A から辺 BC におろした垂線の足を H とし，AH の延長と外接円との交点を Q とする。

- (1) $\angle BAC + \angle OBC$ を求めよ。
 (2) $BP = CQ$ を示せ。

解答

- (1) 円周角の性質より

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$$

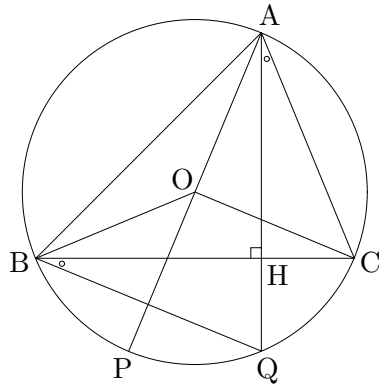
OB = OC より

$$\angle OBC = \angle OCB$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned} \angle BAC &= \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle OBC) \\ &= 90^\circ - \angle OBC \end{aligned}$$

$$\therefore \angle BAC + \angle OBC = 90^\circ \quad (\text{答})$$



- (2) $\triangle ABC$ は鋭角三角形であるから，外心 O は内部にあることに注意する。

(1)より

$$\angle BAC + \angle OBC = \angle BAH + \angle CAQ + \angle OBC = 90^\circ$$

円周角の定理より $\angle CAQ = \angle CBQ$ であるから，

$$\begin{aligned} \angle OBQ &= \angle CBQ + \angle OBC \\ &= \angle CAQ + \angle OBC \\ &= 90^\circ - \angle BAH \\ &= \angle ABH \end{aligned}$$

$$\therefore \angle CBQ = \angle OBQ - \angle OBC = \angle ABH - \angle OBC = \angle ABO$$

OA = OB より

$$\angle BAP = \angle BAO = \angle ABO = \angle CBQ$$

対応する円弧の長さが等しく，弓形が合同となるから，

$$BP = CQ$$

(おわり)

(注) 上の解答は 2003 年 5 月当時のもので，(1)を用いて (2)を証明しているが，AP が外接円の直径であることと $\angle BHQ = 90^\circ$ に注目して

$$\angle BAP = 90^\circ - \angle APB = 90^\circ - \angle AQB = \angle CBQ$$

とした方が簡単に証明できる。(2007 年 12 月)