

図チャレ 第 21 回 (2003 年 6 月)

AB = AC である二等辺三角形 ABC の内心を I, 辺 BC に接する傍接円の中心を J とする。IJ を直径とする円は, 直線 AB (および直線 AC) に接することを示せ。

解答

BC の中点を M とおくと, AB = AC より直線 AM は $\angle BAC$ の二等分線となり, 内心 I と傍心 J はともに直線 AM 上にある。

BI は $\angle ABM$ の二等分線であるから

$$\frac{AI}{IM} = \frac{AB}{BM}$$

BJ は $\angle ABM$ の外角の二等分線であるから

$$\frac{AJ}{JM} = \frac{AB}{BM}$$

2 式より

$$\frac{AI \cdot AJ}{IM \cdot JM} = \frac{AB^2}{BM^2}$$

$\angle IBJ = \angle ICJ = 90^\circ$ より, 4 点 B, C, I, J を通る円が存在し, 方べきの定理より
 $IM \cdot JM = BM \cdot CM = BM^2$

であるから,

$$AI \cdot AJ = AB^2 \quad \therefore AB : AI = AJ : AB$$

よって, $\triangle ABI \sim \triangle AJB$ であり, 特に

$$\angle ABI = \angle AJB$$

であるから, 2 点 I, J を通り, B において直線 AB に接する円が存在する。

$$\angle IBJ = 90^\circ$$

より, その円は IJ を直径とする。

(おわり)

