

## 図チャレ 第22回 (2003年7月)

点Aを中心とする半径 $r$ の円 $C_1$ と、点Bを中心とする半径 $R$ の円 $C_2$ が、点Tにおいて外接している。Tにおける2円の共通接線上に点Pをとり、線分APと円 $C_1$ の交点をM、線分BPと円 $C_2$ の交点をNとする。

$r < R$ ならば、劣弧MTより劣弧NTの方が長いことを示せ。

解答

$\angle MAT = \alpha$ ,  $\angle NBT = \beta$  とおくと

$$PT = r \tan \alpha = R \tan \beta$$

$$\therefore r\alpha \frac{\tan \alpha}{\alpha} = R\beta \frac{\tan \beta}{\beta} \quad \dots\dots ①$$

$r < R$  より

$$\tan \alpha = \frac{PT}{r} > \frac{PT}{R} = \tan \beta$$

$\tan x$  は  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  で単調増加であるから、

$$\alpha > \beta$$

$y = \tan x$  の  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のグラフは下に凸であるから、

$$\frac{\tan \alpha}{\alpha} > \frac{\tan \beta}{\beta} \quad \dots\dots ②$$

②, ①より

$$r\alpha \frac{\tan \beta}{\beta} < r\alpha \frac{\tan \alpha}{\alpha} = R\beta \frac{\tan \beta}{\beta}$$

$\frac{\tan \beta}{\beta} > 0$  より

$$r\alpha < R\beta$$

よって、劣弧MTより劣弧NTの方が長い。

(おわり)

(注) ②については、(狭義)単調増加を導くために

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\tan x}{x} \right) &= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \tan x \cos^2 x}{x^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} > 0 \end{aligned}$$

としてもよい。

