

## 図チャレ 第27回 (2003年12月)

$\triangle ABC$  の3頂点が内部または周上にある半径  $R$  の円  $E$  を考える。

(1)  $\triangle ABC$  が鈍角三角形

(2)  $\triangle ABC$  が鋭角三角形

のそれぞれの場合において、 $R$  が最小となる円  $E$  はどのような円か。

解答

(1)  $\angle BAC$  が鈍角とすると  $BC$  が最大辺であり、 $BC$  を直径とする円を  $E'$  とすると、 $E'$  は2点  $B, C$  を内部または周上にもつ最小の円である。

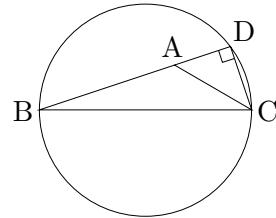
直線  $AB$  と円  $E'$  の交点のうち  $B$  でない方を  $D$  とすると、 $E'$  は  $BC$  を直径とする円であるから、

$$\angle BDC = 90^\circ$$

$\angle BAC$  は鈍角であるから、点  $A$  は線分  $BD$  上の点となり、 $\triangle ABC$  は円  $E'$  の内部または周上にある。

よって、 $R$  が最小となる円  $E$  は

$\triangle ABC$  の最大辺を直径とする円 (答)



(2) 必要ならば  $\triangle ABC$  を平行移動させて、

2点  $B, C$  は円  $E$  の周上にある

としてよい。  $BA$  の延長と円  $E$  との交点を  $D$  とし、 $\angle BAC = \alpha$ 、 $\angle BDC = \theta$  とおくと

$$0^\circ < \theta \leq \alpha < 90^\circ$$

$$\therefore 0 < \sin \theta \leq \sin \alpha < 1$$

正弦定理より

$$R = \frac{BC}{2 \sin \theta} \geq \frac{BC}{2 \sin \alpha}$$

であるから、 $R$  が最小となるのは  $\theta = \alpha$  のときである。

よって、 $R$  が最小となる円  $E$  は

$\triangle ABC$  の外接円 (答)

