

図チャレ 第28回(2004年1月)

半径が1である2円 C_1, C_2 が異なる2点 A, B で交わり, 弦 AB の長さは1である。 A を通る直線と2円 C_1, C_2 がそれぞれ A と異なる点 P, Q で交わるとき, 線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

解答

C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とすると, $\triangle O_1AB, \triangle O_2AB$ はともに正三角形であるから, 劣弧 AB の円周角を考えて

$$\angle APB = \angle AQB = 30^\circ$$

B から PQ におろした垂線の足を H とすると, H は PQ の中点であり,

$$PH = QH = \frac{BH}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} BH$$

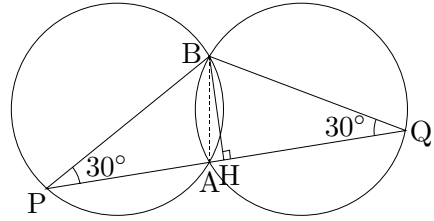
$$\therefore PQ = 2\sqrt{3} BH$$

$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}$ ($H = A$ のときを含む) であるから,

$$PQ = 2\sqrt{3} BH \text{ が最大となるのは } H = A \text{ のとき}$$

であり,

$$PQ \text{ の長さの最大値は } 2\sqrt{3} \text{ (答)}$$



(注) 異なる円であっても, 半径が等しければ, 同じ長さの円弧に対する円周角の大きさは等しい。