

図チャレ 第30回 (2004年3月)

1つの円に内接する2つの三角形が、周の長さと同面積が等しいならば合同であることを示せ。

解答

2つの三角形を $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ とし、

$$BC = a, CA = b, AB = c, \angle BAC = \alpha$$

$$QR = p, RP = q, PQ = r, \angle QPR = \theta$$

とおく。仮定より

$$a + b + c = p + q + r \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$bc \sin \alpha = qr \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

正弦定理より

$$(\text{外接円の直径}) = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{p}{\sin \theta}$$

であるから、 $\textcircled{2}$ より

$$abc \sin \alpha = aqr \sin \theta = pqr \sin \alpha$$

$$\therefore abc = pqr \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

余弦定理より

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \theta = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr}$$

であるから、 $\textcircled{2}$ に代入して

$$4b^2c^2 \sin^2 \alpha = 4q^2r^2 \sin^2 \theta$$

$$4b^2c^2(1 - \cos^2 \alpha) = 4q^2r^2(1 - \cos^2 \theta)$$

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4q^2r^2 - (q^2 + r^2 - p^2)^2$$

$$(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$

$$= (2qr + q^2 + r^2 - p^2)(2qr - q^2 - r^2 + p^2)$$

$$\{(b+c)^2 - a^2\}\{a^2 - (b-c)^2\} = \{(q+r)^2 - p^2\}\{p^2 - (q-r)^2\}$$

$$\therefore (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$$

$$= (p+q+r)(q+r-p)(p+q-r)(p-q+r)$$

$\textcircled{1}$ を考慮して $a+b+c = p+q+r = t$ とおくと

$$t(t-2a)(t-2b)(t-2c) = t(t-2p)(t-2q)(t-2r)$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ および $t > 0$ より

$$4(ab+bc+ca)t = 4(pq+qr+rp)t$$

$$\therefore ab+bc+ca = pq+qr+rp \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より、 x の恒等式

$$(x-a)(x-b)(x-c) = (x-p)(x-q)(x-r)$$

が成り立つから

$$\{a, b, c\} = \{p, q, r\}$$

となり,

$$\triangle ABC \equiv \triangle PQR$$

である。

(おわり)

(注) 三角形でなければ, 辺の長さの組が等しいだけでは合同とは限らない。