

図チャレ 第35回 (2004年8月)

- (1) 平面上にある任意の4点 A, B, C, D に対して, 不等式

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$$

が成り立つことを複素数平面を用いて証明せよ。また, 等号が成り立つとき, 4点 A, B, C, D の位置関係を答えよ。

- (2) 正三角形 ABC と同一平面上にある点 P に対して, 不等式

$$PA + PB \geq PC$$

が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つとき, 点 P の位置を求めよ。

注: (1) の不等式が成り立つことをオイラーの定理といい, 等号成立条件をトレミーの定理という。もちろん, 歴史的にはトレミーの定理の方が先である。

解答

- (1) 複素数平面上において, 4点 A, B, C, D を表す複素数をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。一般に, 恒等式

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) &= -\alpha\delta - \beta\gamma + \alpha\beta + \gamma\delta \\ &= (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) \end{aligned}$$

が成り立つから, 三角不等式により

$$\begin{aligned} |(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)| + |(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| &\geq |(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)| \\ \therefore |\alpha - \beta||\gamma - \delta| + |\alpha - \delta||\beta - \gamma| &\geq |\alpha - \gamma||\beta - \delta| \end{aligned}$$

これは, $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ が成り立つことを表す。(不等式の証明終)

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD &\iff \arg \frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)} = 0^\circ \\ &\iff \arg(-1) \cdot \frac{\beta - \alpha}{\delta - \alpha} \cdot \frac{\delta - \gamma}{\beta - \gamma} = 0^\circ \\ &\iff \arg \frac{\beta - \alpha}{\delta - \alpha} + \arg \frac{\delta - \gamma}{\beta - \gamma} = 180^\circ \\ &\iff \text{「A, B, C, D は同一円周上」 (答)} \end{aligned}$$

(注) 偏角 \arg は 360° ごとに同一視して, 0° 以上 360° 未満の角度で表記している。

- (2) (1) より

$$PA \cdot BC + PB \cdot CA \geq PC \cdot AB$$

が成り立ち, $AB = BC = CA > 0$ より

$$PA + PB \geq PC$$

が成り立つ。

(不等式の証明終)

等号成立条件についても, (1) より

$$PA + PB = PC \iff \text{「P は } \triangle ABC \text{ の外接円上」 (答)}$$