

図チャレ 第36回(2004年9月)

$\triangle OAB$ において、辺 OA 上に点 C を、辺 OB 上に点 D をとり、線分 AD と線分 BC の交点を P とする。ただし、 C, D は辺の端点ではないものとする。さらに、点 Q を四角形 $OCQD$ が平行四辺形となるようにとり、線分 AD と線分 CQ の交点を E 、線分 BC と線分 DQ の交点を F とする。

- (1) 線分 EF と線分 AB は平行であることを示せ。
- (2) 点 R を四角形 $OARB$ が平行四辺形となるようにとるとき、3点 P, Q, R は同一直線上にあることを示せ。

コメント：ベクトルを用いれば機械的に証明できますが、できるだけ初等幾何による証明を考えてみて下さい。とはいえ、比の計算があるので数式処理は避けられませんが。

解答

- (1) 直接には、 $PE:EA = PF:FB$ であることを示せばよい。

C, D の内分の比を

$$OC : CA = a : 1 - a \quad (0 < a < 1)$$

$$OD : DB = b : 1 - b \quad (0 < b < 1)$$

とおき、 D を通り BC に平行な直線と辺 OA の交点を G とする。 $DG \parallel BC$ より

$$OG : GC = OD : DB = b : 1 - b$$

$$\therefore OG : GC : CA = ab : a(1 - b) : 1 - a$$

$DG \parallel BC$ より

$$DP : PA = GC : CA = a(1 - b) : 1 - a \quad \dots\dots ①$$

$OD \parallel CQ$ より

$$DE : EA = OC : CA = a : 1 - a \quad \dots\dots ②$$

①かつ②より

$$\begin{aligned} DP : PE : EA &= \frac{a(1 - b)}{1 - ab} : \frac{1 - a}{1 - ab} : (1 - a) : 1 - a \\ &= a(1 - b) : ab(1 - a) : (1 - ab)(1 - a) \end{aligned}$$

$$\therefore PE : EA = ab : 1 - ab$$

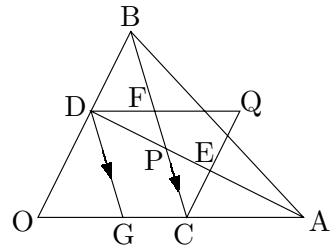
a と b の役割を入れかえて同様に考えると、

$$PF : FB = ab : 1 - ab$$

となるから、

$$PE : EA = PF : FB \quad \therefore EF \parallel AB$$

(証明おわり)



(2) 直線 CE ($\parallel OB$) と線分 PR の交点を X とし、
 X を通り辺 OA に平行な直線と線分 BC の交点を
 Y とする。 $CX \parallel AR$ より

$$PX : XR = PE : EA$$

$XY \parallel BR$ ($\parallel OA$) より

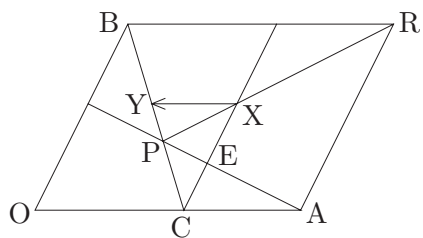
$$PY : YB = PX : XR = PE : EA$$

(1) より $Y = F$ であり、 $FX \parallel OA$, $CX \parallel OB$ より

$$X = Q$$

となる。 $X (= Q)$ は線分 PR 上の点と定めたから、

P, Q, R は同一直線上にある。



(証明おわり)

(注) ベクトルによる証明は、機械的に(簡単に)できるので省略する。