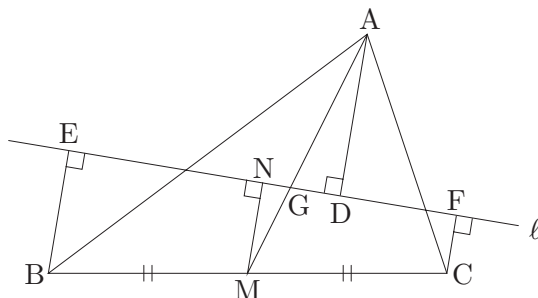


図チャレ 第37回 (2004年10月)

$\triangle ABC$ の辺 AB , AC 上にそれぞれ端点と異なる点 P , Q をとり, 2 点 P , Q を通る直線を ℓ とする。 A , B , C から ℓ におろした垂線の足をそれぞれ D , E , F とする。
 $AD = BE + CF$ ならば, ℓ は $\triangle ABC$ の重心を通ることを示せ。

解答



BC の中点を M とし, M から ℓ におろした垂線の足を N とすると,
 $BE \parallel MN \parallel CF$, $BM = CM$

より

$$BE + CF = 2MN \quad (\text{注}) \quad \therefore AD = 2MN$$

中線 AM と ℓ の交点を G とすると

$$\triangle ADG \sim \triangle MNG, \quad AD : MN = 2 : 1$$

であるから,

$$AG : GM = 2 : 1$$

よって, G は $\triangle ABC$ の重心であり, 直線 ℓ は重心 G を通る。

(証明おわり)

(注) $BE + CF = 2MN$ について詳しく述べると, 次のようになる。

B , C から直線 MN におろした垂線の足をそれぞれ P , Q とおくと

$$\triangle BMP \cong \triangle CMQ$$

となる。そこで,

$$MP = MQ = d$$

とおくと, BE , CF の一方は $MN + d$, 他方は $MN - d$ となるから,

$$BE + CF = (MN + d) + (MN - d) = 2MN$$