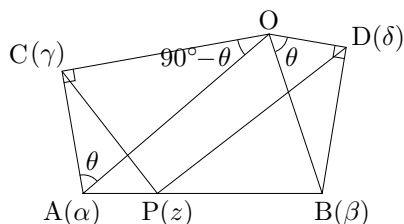


## 図チャレ 第38回 (2004年11月)

$\triangle OAB$  の辺  $OA$ ,  $OB$  を斜辺とする直角三角形  $OAC$ ,  $OBD$  がそれぞれ  $\triangle OAB$  の外側にあり,  $\triangle OAC \sim \triangle BOD$  であるとする。  $\angle OAC = \angle BOD = \theta$  とするとき, 辺  $AB$  を  $\cos^2 \theta : \sin^2 \theta$  に内分する点を  $P$  とすれば,  $\angle CPD$  は直角であることを示せ。

解答

$O$  を原点とする複素数平面上で考えて, 各点を表す複素数をそれぞれ  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$ ,  $D(\delta)$ ,  $P(z)$  とする。必要ならば, 裏返した場合を考えることにより,  $O, A, B$  はこの順で反時計まわりであるとして一般性を失わない。



直角三角形  $OAC$  に注目すると,

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha \times \cos(90^\circ - \theta) \{ \cos(\theta - 90^\circ) + i \sin(\theta - 90^\circ) \} \\ &= \alpha \sin \theta (\sin \theta - i \cos \theta)\end{aligned}$$

直角三角形  $OBD$  に注目すると,

$$\delta = \beta \times \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$P$  は  $AB$  を  $\cos^2 \theta : \sin^2 \theta$  に内分するから

$$z = \alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta$$

$\overrightarrow{PC}$  に対応する複素数は

$$\begin{aligned}\gamma - z &= \alpha \sin \theta (\sin \theta - i \cos \theta) - (\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta) \\ &= -\alpha i \sin \theta \cos \theta - \beta \cos^2 \theta \\ &= -i \cos \theta (\alpha \sin \theta - i \beta \cos \theta)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{PD}$  に対応する複素数は

$$\begin{aligned}\delta - z &= \beta \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) - (\alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta) \\ &= -\alpha \sin^2 \theta + i \beta \sin \theta \cos \theta \\ &= -\sin \theta (\alpha \sin \theta - i \beta \cos \theta) \\ &= -i (\tan \theta) (\gamma - z)\end{aligned}$$

この式は, 点  $P$  を中心にして線分  $PC$  を  $-90^\circ$  回転させると線分  $PD$  に重なる (長さは  $\tan \theta$  倍になる) ことを表すから,

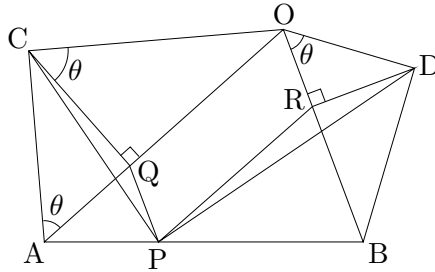
$\angle CPD$  は直角

である。

(証明おわり)

別解 初等幾何による証明を小島敏久先生に教えていただきました。

点Cから辺OAに下ろした垂線の足をQ、点Dから辺OBに下ろした垂線の足をRとする。



$$\begin{aligned} AQ : QO &= AC \cos \theta : OC \sin \theta \\ &= OA \cos^2 \theta : OA \sin^2 \theta = \cos^2 \theta : \sin^2 \theta \end{aligned}$$

同様に，

$$OR : RB = \cos^2 \theta : \sin^2 \theta$$

であるから，

$$AP : PB = AQ : QO = OR : RB$$

よって， $PQ \parallel RO$ ， $PR \parallel QO$ であるから

$$PQOR \text{ は平行四辺形} \quad \dots\dots (*)$$

となる。

$\triangle CPQ$  と  $\triangle PDR$  において， $PR = QO$ ， $PQ = RO$ であるから

$$\frac{PR}{CQ} = \frac{QO}{CQ} = \tan \theta, \quad \frac{DR}{PQ} = \frac{RO}{PQ} = \tan \theta$$

$$\therefore CQ : PR = PQ : DR \quad \dots\dots ①$$

また，(\*)より  $\angle AQP = \angle PRB$ であるから

$$\angle CQP = 90^\circ + \angle AQP = 90^\circ + \angle PRB = \angle PRD \quad \dots\dots ②$$

①，②より  $\triangle CPQ \cong \triangle PDR$ であるから

$$\angle CPQ = \angle PDR \quad \dots\dots ③$$

③および(\*)より

$$\begin{aligned} \angle CPD &= \angle CPQ + \angle QPR + \angle RPD \\ &= \angle PDR + \angle QPR + \angle RPD \\ &= (180^\circ - \angle PRD) + \angle QPR \\ &= 180^\circ - (90^\circ + \angle PRB) + \angle QPR \\ &= 90^\circ - \angle PRB + \angle QPR \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

(証明おわり)