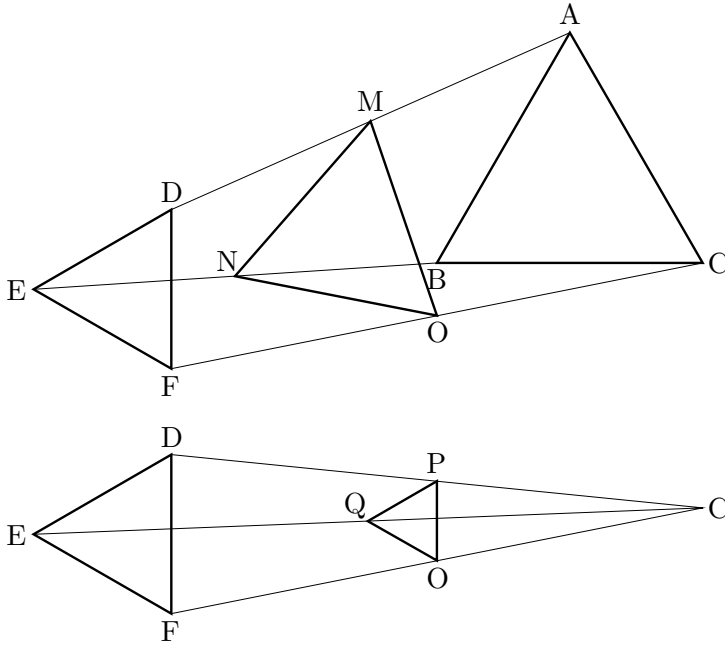


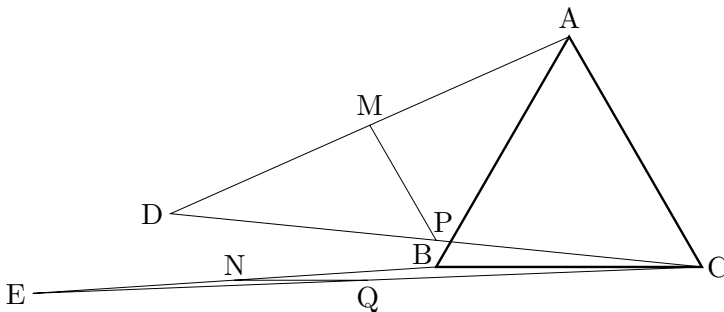
# 図チャレ 第40回 (2005年1月)

2つの正三角形 ABC, DEF に対して AD, BE, CF の中点をそれぞれ M, N, O とするとき,  $\triangle OMN$  は正三角形であることを証明せよ。ただし, ABC, DEF はともに反時計まわりの順になっているものとする。

解答



CD の中点を P, CE の中点を Q とすると, 点 C と中心として  
 $\triangle OPQ \sim \triangle FDE$  ..... ①  
 $\triangle FDE$  は正三角形であるから,  
 OP を O のまわりに  $60^\circ$  回転させると OQ ..... ②  
 となる。



$\triangle CAD$  および  $\triangle BCE$  において中点連結定理より  
 $\vec{PM} = \frac{1}{2}\vec{CA}$ ,  $\vec{QN} = \frac{1}{2}\vec{CB}$  ..... ③

$\angle BCA = 60^\circ$  より

$\overrightarrow{PM}$  を P のまわりに  $60^\circ$  回転させると  $\overrightarrow{QN}$  ..... ④

②, ④ より

$$\angle OPM = \angle OQN$$

①, ③ より  $OP = OQ$ ,  $PM = QN$  であるから,

$$\triangle OPM \equiv \triangle OQN \quad \dots\dots \text{⑤}$$

よって,  $OM = ON$  となり, ②, ⑤ より  $\angle MON = 60^\circ$  であるから

$\triangle OMN$  は正三角形

である。

(おわり)

(注) 上の解答では, 回転させることにより  $\angle OPM = \angle OQN$  とあっさり片付けたが, 詳しく述べると次のようになる。

点 R を四角形 QPMR が平行四辺形になるように定めると, ④より

$$\angle RQN = 60^\circ$$

$\angle MPQ = \theta$  とおくと,  $\angle PQR = 180^\circ - \theta$  であり,

$$\angle OQN = 360^\circ - (60^\circ \times 2 + 180^\circ - \theta) = 60^\circ + \theta = \angle OPM$$