

図チャレ 第43回(2005年4月)

三角形 ABC の辺 AB 上の点 M と辺 AC 上の点 N とを結ぶ線分 MN 上に、三角形 ABC の重心 G がある。MG : GN = 3 : 2 のとき、以下の問いに答えよ。

- (1) AM : MB と AN : NC を求めよ。
- (2) D を辺 BC の中点とする。直線 MD と直線 AC の交点を E とするとき、AC : CE を求めよ。

出典：2005年 東北大学

初等幾何による解法

- (1) 点 M から辺 BC に平行に引いた直線と AD, AC の交点をそれぞれ P, Q とする。

$$MP = PQ$$

であるから、メネラウスの定理より

$$\frac{MG}{GN} \cdot \frac{NA}{AQ} \cdot \frac{QP}{PM} = \frac{3}{2} \cdot \frac{NA}{AQ} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore AN : AQ = 2 : 3$$

△APQ にメネラウスの定理をあてはめて

$$\frac{AG}{GP} \cdot \frac{PM}{MQ} \cdot \frac{QN}{NA} = \frac{AG}{GP} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore AG : GP = 4 : 1$$

G は重心で AG : GD = 2 : 1 であるから、

$$AG : GP : PD = 4 : 1 : 1$$

$$\therefore AM : MB = AP : PD = 5 : 1 \quad (\text{答})$$

また、

$$AQ : QC = AM : MB = 5 : 1 = 15 : 3$$

$$AN : NQ = 2 : 1 = 10 : 5$$

であるから、

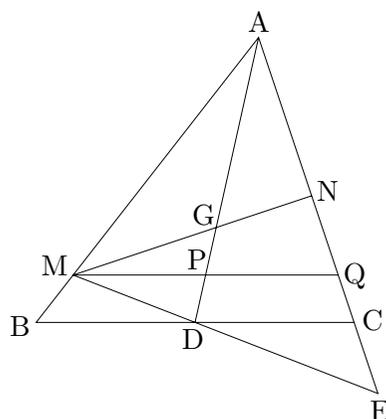
$$AN : NC = 10 : (5 + 3) = 5 : 4 \quad (\text{答})$$

- (2) △ABC と直線 ME にメネラウスの定理をあてはめると

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BM}{MA} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{5} = 1$$

$$AE : EC = (AC + CE) : EC = 5 : 1$$

$$\therefore AC : CE = 4 : 1 \quad (\text{答})$$



ベクトルによる解法

(1) G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

MG : GN = 3 : 2 より

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AN}$$

点 M は辺 AB 上, 点 N は辺 AC 上にあり, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は線型独立であるから,

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM}, \quad \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AN}$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore AM : MB = 5 : 1, \quad AN : NC = 5 : 4 \quad (\text{答})$$

(2) D は BC の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{5}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{5}\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

点 E は直線 AC 上にあり, 点 D は直線 ME 上にあるから,

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore AC : CE = 4 : 1 \quad (\text{答})$$