

## 図チャレ 第44回(2005年5月)

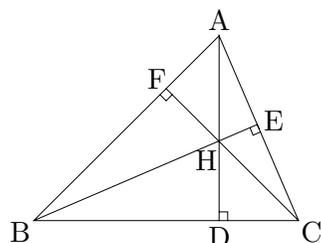
鋭角三角形  $ABC$  において、頂点  $A, B, C$  から対辺  $BC, CA, AB$  におろした垂線の足をそれぞれ  $D, E, F$  とする。

- (1)  $\angle ADE = \angle ACF$  が成り立つことを証明せよ。
- (2)  $\triangle ABC$  の垂心は  $\triangle DEF$  の内心であることを証明せよ。

### 解答

$\triangle ABC$  の垂心 ( $AD, BE, CF$  の交点) を  $H$  とする。

- (1)  $\angle HDC = \angle HEC = 90^\circ$  であり、  
$$\angle HDC + \angle HEC = 180^\circ$$
であることより、4点  $D, C, E, H$  は同一円周上にあるから、  
$$\angle HDE = \angle HCE$$
$$\therefore \angle ADE = \angle ACF$$



(証明おわり)

- (2) (1)において

$$\angle ADE = \angle ACF$$

を導いたのと同様にして、4点  $B, D, H, F$  が同一円周上にあることより

$$\angle HDF = \angle ABE$$

$\angle ACF = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABE$  であるから

$$\angle HDE = \angle HDF$$

以上と同様の議論により、

$$\angle HED = \angle HEF, \quad \angle HFE = \angle HFD$$

も導かれるから、 $H$  は  $\triangle DEF$  の内角の二等分線の交点である。

よって、 $\triangle ABC$  の垂心  $H$  は  $\triangle DEF$  の内心である。

(証明おわり)