

図チャレ 第46回 (2005年7月)

鋭角三角形 ABC の外側に 3 つの正三角形 BCD, CAE, ABF を作る。

- (1) $\triangle ABE \equiv \triangle AFC$ であることを示せ。
 (2) 3 つの線分 AD, BE, CF は 1 点で交わることを示せ。

解答

- (1) $\triangle ABF$ は正三角形であるから

$$AB = AF$$

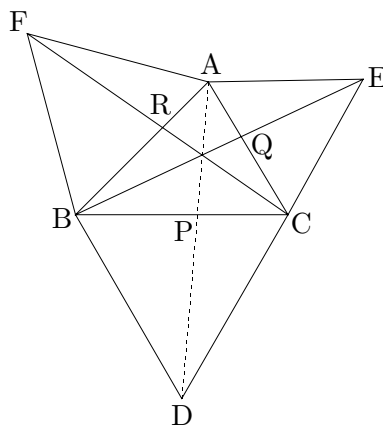
$\triangle CAE$ は正三角形であるから

$$AE = AC$$

$\angle BAE = \angle BAC + 60^\circ = \angle FAC$ であるから,
 二辺挟角相等により

$$\triangle ABE \equiv \triangle AFC$$

(証明おわり)



- (2) 線分 AD と辺 BC の交点を P, 線分 BE と辺 CA の交点を Q, 線分 CF と辺 AB の交点を R とすると

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\triangle BDA}{\triangle CAD}, \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{\triangle CEB}{\triangle ABE}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{\triangle AFC}{\triangle BCF} \quad \dots\dots (*)$$

(1)より

$$\triangle ABE \equiv \triangle AFC$$

であり, 同様にして

$$\triangle BCF \equiv \triangle BDA, \quad \triangle CAD \equiv \triangle CEB$$

も示されるから, (*)より

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

チェバの定理より, 3 線分 AP, BQ, CR は 1 点で交わり, したがって 3 線分 AD, BE, CF は 1 点で交わる。 (証明おわり)