

図チャレ 第47回 (2005年8月)

鋭角三角形 ABC の内部に，次の条件を満たす 3 点 P, Q, R が存在することを証明せよ。

(条件) 線分 AP 上に点 R ，線分 BQ 上に点 P ，線分 CR 上に点 Q があり，
 $\triangle PQR$ は正三角形である。

解答

$\triangle ABC$ の外側に 2 つの正三角形 ABD_1, ABD_2 を描き，正三角形 ABD_1 の外接円を E_1 ，正三角形 ACD_2 の外接円を E_2 とする。

$\triangle ABC$ は鋭角で，特に

$$\angle ABC < 120^\circ$$

であるから， E_1 と E_2 は A 以外に交点 F をもち， F は劣弧 AB 上および劣弧 AC 上にある。
 3 線分 AF, BF, CF は点 F において 120° ずつの角をなすから，

交点 F は $\triangle ABC$ の内部

にある。

円 E_1 の劣弧 BF 上に点 P を，線分 AP と円 E_2 が A 以外の交点 R をもつようにとる。点 P を点 F の十分近くにとることにより， $\triangle ABC$ の内部にすることができる。さらに，直線 BP と線分 CR の交点を Q とすると，線分 AP 上に R ，線分 BQ 上に P ，線分 CR 上に Q がある。

円 E_1, E_2 における円周角の性質より

$$\angle APB = 180^\circ - \angle AD_1B = 120^\circ$$

$$\angle ARC = 180^\circ - \angle AD_2C = 120^\circ$$

であるから

$$\angle RPQ = 180^\circ - \angle APB = 60^\circ$$

$$\angle QRP = 180^\circ - \angle ARC = 60^\circ$$

$$\angle PQR = 180^\circ - (\angle RPQ + \angle QRP) = 60^\circ$$

となり， $\triangle PQR$ は正三角形である。

(証明おわり)

