

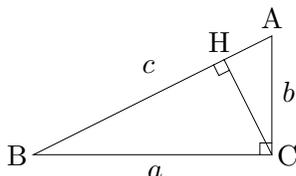
図チャレ 第 49 回 (2005 年 10 月)

$\angle C$ を直角とする直角三角形 ABC に対して, 正方形 $BCDE$ と正方形 $CAFG$ を三角形 ABC の外側に作る。点 C から辺 AB におろした垂線の足を H とするとき, 3 直線 AE, BF, CH は 1 点で交わることを証明せよ。

解答

$BC = a, CA = b, AB = c$ とおく。

$$\begin{aligned} \triangle ACH & \sim \triangle ABC \text{ より} \\ AC : AH &= AB : AC \\ b : AH &= c : b \\ \therefore AH &= \frac{b^2}{c} \end{aligned}$$



同様にして

$$BH = \frac{a^2}{c}$$

であるから,

$$AH : BH = b^2 : a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

AE と BC の交点を M とすると,

$$\triangle BEM \sim \triangle CAM$$

より

$$\begin{aligned} BM : CM &= BE : CA \\ &= a : b \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

BF と CA の交点を N とすると,

$$\triangle BCN \sim \triangle FAN$$

より

$$\begin{aligned} CN : AN &= BC : FA \\ &= a : b \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

①, ②, ③ より

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

よって, チェバの定理(の逆)より, 3 直線 AE, BF, CH は 1 点で交わる。

(証明おわり)

