

図チャレ 第51回 (2005年12月)

三角形 ABC の内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とし, 直線 BC と直線 EF は点 P で交わるとする。

- (1) $BP : CP = BD : DC$ が成り立つことを示せ。
 (2) さらに, 直線 CA と直線 FD が点 Q で交わり, 直線 AB と直線 DE が点 R で交わるとき, 3 点 P, Q, R は同一直線上にあることを示せ。

解答

- (1) メネラウスの定理より

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

円の外部の点から円に引いた接線の長さは等しいから

$$AE = AF, \quad BF = BD, \quad CD = CE$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

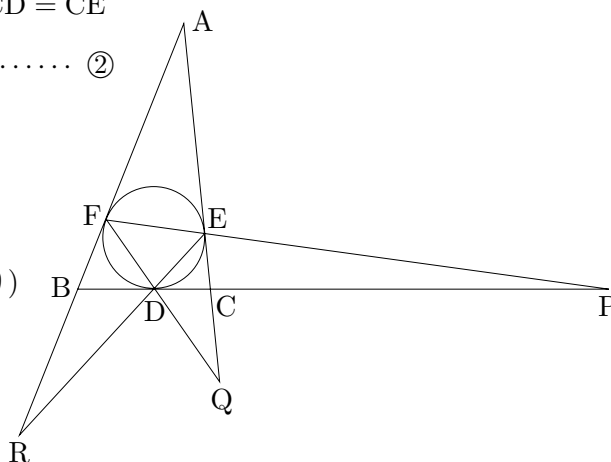
①かつ②より

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\therefore BP : PC = BD : DC$$

(証明おわり)

- (注) ②とチェバの定理より AD, BE, CF が 1 点で交わることが導かれるのは有名。



- (2) (1)より

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BD}{DC}$$

同様にして

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CE}{EA}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{AF}{FB}$$

も成り立つから, ②より

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

P, Q, R はそれぞれ辺 BC, CA, AB の延長上にあるから, メネラウスの定理(の逆)より, 3 点 P, Q, R は同一直線上にある。(証明おわり)