

図チャレ 第 52 回 (2006 年 1 月)

円 C 上の点 P を 1 つの頂点とし, 円 C に内接する正 2006 角形と正 18 角形の (P を含めた) 共有点の個数を求めよ。

解答

$2006 = 2 \times 17 \times 59$, $18 = 2 \times 3^2$ と素因数分解され,

$$\gcd(2006, 18) = 2$$

となることより, 共通の頂点は P とその直径対点 Q の 2 点のみである。

正 2006 角形の頂点を点 P から反時計まわりに $P = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{2005}$ とし, 正 18 角形の頂点を点 P から反時計まわりに $P = B_0, B_1, B_2, \dots, B_{17}$ とする。

B_1 が A_n と A_{n+1} の間にあるとすれば, A_1, A_2, \dots, A_n は直線 B_0B_1 に関して同じ側にあるから, 辺 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ は正 18 角形と共有点を持たず, 辺 A_nA_{n+1} は辺 B_0B_1 および B_1B_2 と交わる。 A_{n+1} 以降も同様のことが繰り返されるから, P と Q 以外の共有点は正 18 角形の頂点の前後で 2 つずつ存在するのみである。

よって, 円 C に内接し頂点 P を共有する正 2006 角形と正 18 角形の共有点の個数は

$$2 + 16 \times 2 = 34 \text{ 個} \quad (\text{答})$$

である。