

図チャレ 第53回 (2006年2月)

放物線 $y = x^2$ 上に相異なる3点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ をとるとき, 点Aにおける接線と直線BCは点Dで交わり, 点Bにおける接線と直線CAは点Eで交わり, 点Cにおける接線と直線ABは点Fで交わるものとする。

- (1) 点Dの座標を a, b, c で表せ。
- (2) 3点D, E, Fは同一直線上にあることを証明せよ。

解答

- (1) 点 $A(a, a^2)$ における放物線 $y = x^2$ の接線の方程式は

$$y = 2a(x - a) + a^2 \quad \therefore y = 2ax - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

直線BCの方程式は

$$y = \frac{b^2 - c^2}{b - c}(x - b) + b^2 \quad \therefore y = (b + c)x - bc \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①かつ②より y を消去して

$$2ax - a^2 = (b + c)x - bc \quad \therefore x = \frac{a^2 - bc}{2a - b - c}$$

①に代入して y を求めると

$$y = \frac{2a(a^2 - bc) - a^2(2a - b - c)}{2a - b - c} = \frac{a^2(b + c) - 2abc}{2a - b - c}$$

$$\therefore D\left(\frac{a^2 - bc}{2a - b - c}, \frac{a^2(b + c) - 2abc}{2a - b - c}\right) \quad (\text{答})$$

- (2) E, Fについても同様に

$$E\left(\frac{b^2 - ca}{2b - c - a}, \frac{b^2(c + a) - 2abc}{2b - c - a}\right)$$

$$F\left(\frac{c^2 - ab}{2c - a - b}, \frac{c^2(a + b) - 2abc}{2c - a - b}\right)$$

\overrightarrow{DE} について

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \left(\frac{b^2 - ca}{2b - c - a} - \frac{a^2 - bc}{2a - b - c}, \frac{b^2(c + a) - 2abc}{2b - c - a} - \frac{a^2(b + c) - 2abc}{2a - b - c}\right) \\ &= \frac{1}{(2b - c - a)(2a - b - c)}(X, Y) \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} X &= (b^2 - ca)(2a - b - c) - (2b - a - c)(a^2 - bc) \\ &= b^2(2a - b) - a^2(2b - a) + \{a(b - 2a) - b^2 + b(2b - a) + a^2\}c + (a - b)c^2 \\ &= a^3 - b^3 - 2ab(a - b) - (a^2 - b^2)c + (a - b)c^2 \\ &= (a - b)\{a^2 + ab + b^2 - 2ab - (a + b)c + c^2\} \\ &= (a - b)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y &= \{ab^2 + (b^2 - 2ab)c\}(2a - b - c) - \{a^2b + (a^2 - 2ab)c\}(2b - a - c) \\
&= ab^2(2a - b) - a^2b(2b - a) \\
&\quad + \{(b^2 - 2ab)(2a - b) - ab^2 - (2b - a)(a^2 - 2ab) + a^2b\}c \\
&\quad + (-b^2 + 2ab + a^2 - 2ab)c^2 \\
&= ab(a^2 - b^2) + (a^3 - b^3 - 7a^2b + 7ab^2)c + (a^2 - b^2)c^2 \\
&= (a - b)\{ab(a + b) + (a^2 + ab + b^2 - 7ab)c + (a + b)c^2\} \\
&= (a - b)(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 - 6abc)
\end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{a - b}{(2a - b - c)(2b - c - a)}(u, v)$$

$$u = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$v = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 - 6abc$$

u, v は a, b, c について対称であることに注意すると, b と c を入れかえることにより

$$\overrightarrow{DF} = \frac{a - c}{(2a - b - c)(2c - a - b)}(u, v) = \frac{(a - c)(2b - c - a)}{(a - b)(2c - a - b)}\overrightarrow{DE}$$

よって, 3 点 D, E, F は同一直線上にある。

(証明おわり)