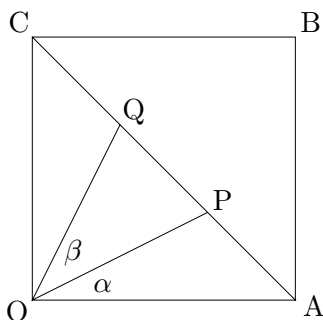


## 図チャレ 第 54 回 (2006 年 3 月)

正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする。また， $\angle AOP = \alpha$ ， $\angle POQ = \beta$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $\cos \alpha$ ， $\cos \beta$  の値を求めよ。
- (2)  $\alpha < \frac{\pi}{6} < \beta$  を示せ。
- (3) 線分 PQ の間に点 R を  $\angle POR = \alpha$  となるようにとる。このとき，比 AR : RC を求めよ。



出典：2006 年 広島大学

### 解答

正方形 OABC の一辺の長さが 3 として議論しても，本問では一般性を失わない。

- (1) P, Q から辺 OA におろした垂線の足をそれぞれ M, N とすると，

$$\begin{aligned} PM &\parallel QN \parallel CO \\ AP &= PQ = QC \end{aligned}$$

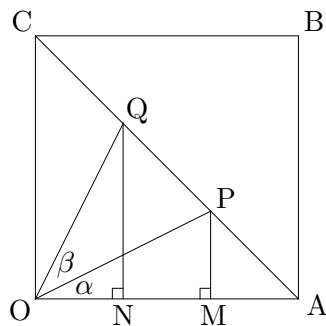
より

$$AM = MN = NO = 1$$

であるから，2 つの直角三角形 OPM, OQN に注目すると

$$\cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\text{答})$$

$$\cos \beta = \frac{ON}{OQ} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{答})$$



$$(2) \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} \text{ と } \cos \alpha, \cos \beta \text{ との大小を比べると,}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{16}}{2\sqrt{5}}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{5}}$$

より

$$\cos \alpha > \cos \frac{\pi}{6} > \cos \beta$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  において  $\cos \theta$  は減少関数であるから

$$\alpha < \frac{\pi}{6} < \beta$$

である。

(おわり)

$$(3) \overrightarrow{OA} = (3, 0), \overrightarrow{OC} = (0, 3) \text{ とすると}$$

$$\overrightarrow{OP} = (2, 1)$$

AR : RC = t : (1 - t) とおくと

$$\overrightarrow{OR} = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} = (3(1 - t), 3t)$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{OR}| = 3\sqrt{(1 - t)^2 + t^2} = 3\sqrt{2t^2 - 2t + 1}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} = 2 \times 3(1 - t) + 1 \times 3t = 3(2 - t)$$

内積の定義より  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} = |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OR}| \cos \alpha$  であるから

$$3(2 - t) = \sqrt{5} \times 3\sqrt{2t^2 - 2t + 1} \times \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(2 - t)^2 = 2^2(2t^2 - 2t + 1)$$

$$t(7t - 4) = 0$$

R ≠ A より t ≠ 0 であるから

$$t = \frac{4}{7} \quad \therefore \text{AR : RC} = 4 : 3 \quad (\text{答})$$