

図チャレ 第55回(2006年4月)

四角形 ABCD は $\angle B = 120^\circ$, $CD = DA = AC$ を満たしているとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $AB < BD$ であることを示せ。
- (2) 線分 BD 上に $AB = BE$ となる点 E をとるとき、 $\angle BAE$ の大きさを求めよ。
- (3) $AB + BC = BD$ であることを示せ。

出典：2006年 新潟大学

解答

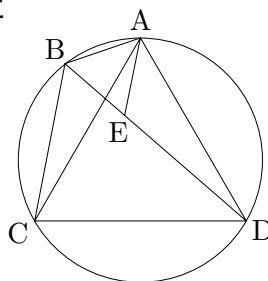
- (1) $CD = DA = AC$ より $\triangle ACD$ は正三角形であり、特に
 $\angle CDA = \angle CAD (= 60^\circ)$

であるから、

$$\angle BDA < \angle CDA = \angle CAD < \angle BAD$$

$\triangle ABD$ において、対辺の長さを考えて

$$AB < BD \quad (\text{証明おわり})$$



- (2) $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$ より四角形 ABCD は 1 つの円に内接し、円周角を考えると

$$\angle ABE = \angle ABD = \angle ACD = 60^\circ$$

であるから、 $AB = BE$ より

$$\triangle ABE \text{ は正三角形}$$

である。特に、

$$\angle BAE = 60^\circ \quad (\text{答})$$

- (3) $\triangle ABC$ と $\triangle AED$ について考えると、 $\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ は正三角形であるから
 $AB = AE$, $AC = AD$

さらに、

$$\angle BAC = 60^\circ - \angle CAE = \angle EAD$$

であるから、2 辺挟角相等により

$$\triangle ABC \cong \triangle AED$$

である。特に、 $BC = ED$ であるから

$$AB + BC = AE + ED = BE + ED = BD \quad (\text{証明おわり})$$