

図チャレ 第57回 (2006年6月)

AB > ADである平行四辺形 ABCD の辺 CD 上に点 E, 辺 AB 上に点 F をとり, 直線 AE と直線 BC の交点を P, 直線 DF と直線 BC の交点を Q とする。BP = CQ = AB のとき, 直線 AE と直線 DF は直交することを示せ。

解答

AB // EC より

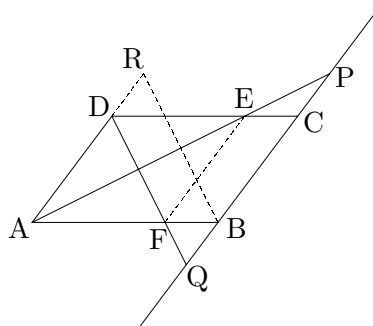
$$\triangle PAB \cong \triangle PEC$$

であるから, AB = BP より

$$EC = CP$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} DE &= DC - EC = AB - EC \\ &= BP - CP \\ &= BC \end{aligned}$$



同様に, DC // FB より

$$\triangle CDQ \cong \triangle BFQ, AF = BC$$

も成り立つから

$$DE = AF = BC = AD$$

となって, 四角形 AFED はひし形である。

特に, 2つの対角線 AE, DF は直交する。

(おわり)

別解

点 B を通り, QD に平行な直線と直線 AD の交点を R とする。

BR // QD, BQ // RD より四角形 BRDQ は平行四辺形であるから, 特に

$$RD = BQ$$

BP = CQ (= AB) より

$$BQ = CQ - BC = BP - BC = CP$$

であるから,

$$AR = AD + DR = BC + BQ = BC + CP = BP$$

したがって, AR // BP より四角形 ABPR は平行四辺形となって, AB = RP も成り立つから, 仮定 AB = BP とあわせて

四角形 ABPR はひし形

となる。ゆえに,

$$AP \perp BR // DQ \text{ すなわち } AE \perp DF$$

(おわり)