

図チャレ 第58回 (2006年7月)

直線 l と共有点をもたない線分 AB があり、線分の両端 A, B から l へおろした垂線の足をそれぞれ P, Q とするとき、

$$AP + BQ = AB$$

が成り立つ。また、 PQ の中点を M とする。

(1) $\angle AMB = 90^\circ$ であることを示せ。

(2) 線分 AB 上に点 F を

$$AF = AP, BF = BQ$$

となるようにとるとき、 $AB \perp FM$ であることを示せ。

解答

(1) AB の中点を N とすると、 $AP \parallel NM \parallel BQ$ より

$$2MN = AP + BQ$$

$$AP + BQ = AB \text{ より}$$

$$MN = AN = BN$$

二等辺三角形の性質より

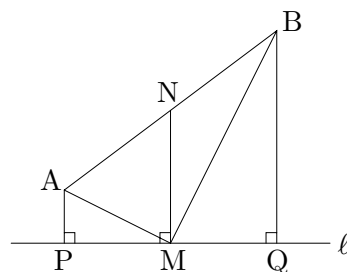
$$\angle NAM = \angle NMA, \angle NMB = \angle NBM$$

これら 4 つの角の総和は $\triangle ABM$ の内角の総和であるから、

$$\begin{aligned} 2\angle AMB &= 2(\angle NMA + \angle NMB) \\ &= \angle NAM + \angle NMA + \angle NMB + \angle NBM \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

$$\therefore \angle AMB = 90^\circ$$

(証明おわり)



(2) $NA = NB$ および $NM \parallel AP$ より

$$\angle NAM = \angle NMA = \angle PAM$$

$$\therefore \angle FAM = \angle PAM$$

$\triangle FAM$ と $\triangle PAM$ を考えると、辺 AB は共通であり、

$$AF = AP$$

であるから、2 辺挟角相等により

$$\triangle FAM \cong \triangle PAM$$

特に、

$$\angle AFM = \angle APM = 90^\circ \quad \therefore AB \perp FM$$

(証明おわり)