

図チャレ 第59回 (2006年8月)

半径 r の 2 円 C_1, C_2 は異なる 2 点 P, Q で交わり, 中心間距離を $2a$ ($0 < a < r$) とする。直線 l は円 C_1 と異なる 2 点 K, M で, 円 C_2 と異なる 2 点 L, N で交わり, 4 点 K, L, M, N はこの順に並ぶ。

- (1) $0 < a \leq \frac{r}{2}$ のとき, $KL = LM = MN$ となる直線 l が存在することを示せ。
- (2) $\frac{r}{2} \leq a < r$ のとき, PQ の中点を通る直線 l で $KL = LM = MN$ となるものが存在することを示せ。
- (3) a を変化させるとき, $KL = LM = MN$ となる線分 KN の長さの最大値を求めよ。

解答

円 C_1 の中心を O_1 , 円 C_2 の中心を O_2 とする。

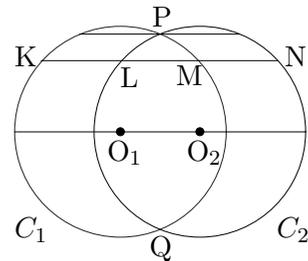
- (1) C_1 と C_2 は, 中心間距離 $2a$ の分だけ互いに平行移動したものであるから, 直線 l を線分 PQ に直交させながら動かすと, つねに

$$KL = MN = 2a$$

である。

l が P に近いときは $LM < 2a$, l が O_1, O_2 を通るとき $LM = 2r - 2a (> 2a)$ であり, P から O_1O_2 の中点に向けて LM の長さは単調増加であるから, $LM = 2a$ となるときがある。

(おわり)



- (2) O_1O_2 の中点を O とすると, 直線 l が O を通るとき LM の中点も O であるから,

$$KL = LM \iff KO : OM = 3 : 1$$

したがって,

$$OM = b, OK = 3b, b \geq r - a$$

となる実数 b が存在することを示せばよい。

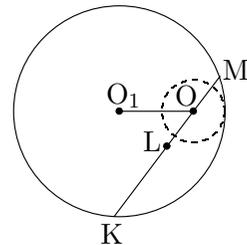
必要条件として, 点 O に関する円 C_1 の方べきを考えると

$$b \cdot 3b = (r - a)(r + a) \quad (a = O_1O)$$

$$\therefore b = \sqrt{\frac{(r - a)(r + a)}{3}}$$

$2a \geq r$ より

$$\begin{aligned} b - (r - a) &= \frac{\sqrt{r - a}(\sqrt{r + a} - \sqrt{3}\sqrt{r - a})}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{r - a}(4a - 2r)}{\sqrt{3}(\sqrt{r + a} + \sqrt{3}\sqrt{r - a})} \geq 0 \end{aligned}$$



であるから，このような正の実数 b は存在する。

(おわり)

(3) $KM \leq 2r$ (直径) であるから，

$$KL = LM = MN \implies KL + LM + MN \leq 3r$$

$2a = r$, $L = O_1$, $M = O_2$ のとき $KL = LM = MN = r$ となるから，
線分 KN の長さの最大値は $3r$ (答)

である。