

図チャレ 第 60 回 (2006 年 9 月)

三角形 ABC の内部に点 P をとる。点 P を通って辺 BC に平行な直線と辺 AB, CA との交点をそれぞれ D, E とし, 点 P を通って辺 CA に平行な直線と辺 BC, AB との交点をそれぞれ F, G とし, 点 P を通って辺 AB に平行な直線と辺 CA, BC との交点をそれぞれ H, I とする。

$\triangle PIF$, $\triangle PEH$, $\triangle PGD$ の面積の和 S が最小となる点 P の位置を求めよ。

解答

$$AG = sAB, \quad GD = tAB, \quad s > 0, \quad t > 0, \quad s + t < 1$$

とし, $\triangle ABC$ の面積を m とおく。

四角形 BIPD は平行四辺形であるから

$$PI = DB = (1 - s - t)AB$$

であり, $\triangle PIF \sim \triangle ABC$ であるから

$$(\triangle PIF \text{ の面積}) = (1 - s - t)^2 m$$

あとの 2 つの三角形についても同様に,

$$HP = sAB, \quad \triangle HPE \sim \triangle ABC$$

より

$$(\triangle PEH \text{ の面積}) = s^2 m,$$

$\triangle GDP \sim \triangle ABC$ より

$$(\triangle PGD \text{ の面積}) = t^2 m$$

であるから,

$$\begin{aligned} S &= m\{(1 - s - t)^2 + s^2 + t^2\} \\ &= m\{2s^2 - 2(1 - t)s + 2t^2 - 2t + 1\} \\ &= m\left\{2\left(s - \frac{1 - t}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}\right\} \\ &= m\left\{2\left(s - \frac{1 - t}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

よって, S は

$$s - \frac{1 - t}{2} = 0 \quad \text{かつ} \quad t - \frac{1}{3} = 0, \quad \text{すなわち} \quad s = t = \frac{1}{3}$$

のとき最小となる。

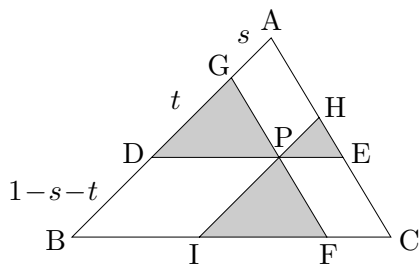
このとき, G, D は辺 AB の 3 等分点であり, $DI \parallel GF$ より

$$BI : IF : FC = BD : DG : GA$$

であるから,

I, F は辺 BC の 3 等分点

である。



直線 AP と辺 BC の交点を M とすると, $DE \parallel BC$ より

$$AP : PM = AD : DB = 2 : 1,$$

$AB \parallel PI$ より

$$BI : IM = AP : PM = 2 : 1$$

であるから,

M は BC の中点, すなわち AP の延長は $\triangle ABC$ の中線
である。同様に, BP の延長と CP の延長も $\triangle ABC$ の中線となるから,

S が最小となるとき, 点 P は $\triangle ABC$ の重心 (答)

である。